

Examen de admisión al PCCM, Abril 2021.

1. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo campo. Demuestre la siguiente afirmación o dé un contraejemplo.

Si existen $f : V \rightarrow W$ y $g : W \rightarrow V$ transformaciones lineales inyectivas, entonces V y W son isomorfos.

2. ¿Existe un espacio vectorial V y W_1, W_2 subespacios de V tales que $W_1 \not\subseteq W_2$, $W_2 \not\subseteq W_1$ y $W_1 \cup W_2$ es subespacio vectorial de V ? Dé un ejemplo o demuestre que no es posible.
3. Sea \mathcal{F} espacio de las funciones reales sobre \mathbb{R} y

$$S : f(x) \rightarrow \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

una transformación de \mathcal{F} en \mathcal{F} .

i) Demuestre que S es lineal.

ii) Describa el núcleo de S y la imagen de S .

4. Resuelva el sistema de ecuaciones para todos $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + y = 3 \\ x + ay = b. \end{cases}$$

5. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en el punto $x = 3$.
6. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que depende de los parámetros reales a y b dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -3.5x^2 - 4.5x & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } x \in [-1, 1] \\ x^2 + 2x + 3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- i) ¿Cuánto deben valer a y b para que la función sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$?
- ii) ¿Para estos valores de los parámetros existen $f'(-1)$, $f'(1)$?

7. Sea P_3 el espacio de los polinomios reales de grado a lo más 3, $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ su base y

$$T[p(x)] = x^2 p'(1/x), \quad p(x) \in P_3.$$

- i) Demuestre que T es una transformación lineal entre P_3 y P_3 .
- ii) Determine la matriz asociada a esta transformación con respecto de B .

8. Resuelva la desigualdad $5 + 2 \cos 2x \leq 3(2 \sin x - 1)$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con $|f'(x)| < K$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que para todo $\epsilon > 0$, existe $l(\epsilon) > 0$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\xi \in (0, l(\epsilon))$

$$|f(x + \xi) - f(x)| < \epsilon.$$

10. Evalúe

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx.$$