Examen de admisión 2024

Resuelve los siguientes ejercicios. Escribe de manera clara y justifica tus argumentos.

1. Sean V un espacio vectorial y W un subespacio de V. ¿Existe $T : V \longrightarrow W$ transformación lineal tal que $Ker\,(T) = W$?
2. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, sea $W\,(a, b, c) = \left\{(x, y) \mid ax^2 + by = c\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
   (a) ¿Para qué valores de (a, b, c) es $W\,(a, b, c)$ un subespacio vectorial?
   (b) En caso de que $W\,(a, b, c)$ sea un subespacio vectorial, encontrar la dimensión de este.
3. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $f'\,(x) = g'\,(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f\,(x) = g\,(x) + r$, para toda $x \in \mathbb{R}$.
4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f\,(x) = xe^{-x}$. Describir la gráfica de f. Se deberá indicar en que partes f es creciente o decreciente, si f tiene mínimos o máximos relativos, su concavidad y su comportamiento al infinito.
5. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Determina si los siguientes son subespacios de V:
   (a) $W_1 = \{f \in V \mid f\,(1) = f\,(3)\}$.
   (b) $W_2 = \{f \in V \mid f\,(1) = 0\}$.
   (c) $W_3 = \{f \in V \mid \forall\, x \in \mathbb{R}\,(f\,(x) = f\,(-x))\}$.
   (d) $W_4 = \{f \in V \mid \exists\, x, y \in \mathbb{R}\,(x \neq y) \wedge (f\,(x) = f\,(y))\}$.
6. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y f la función dada por $f\,(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. ¿$f$ tiene máximos o mínimos relativos en su dominio?
7. Enuncia y demuestra el Teorema de Rolle (no asuma algún otro teorema cuya prueba dependa del teorema de Rolle).
8. Sea $f\,(x) = x^3 + px + q$. Demuestra que:
   (a) f tiene exactamente una raíz en $\mathbb{R}$ si $p > 0$.
   (b) f tiene tres raíces en $\mathbb{R}$ si $4p^3 + 27q^2 < 0$.
9. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Considera las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por: $f\,(x) = 2x$, $g\,(x) = 3sin\,(x)$ y $h\,(x) = 4cos\,(x)$. Demuestra que el conjunto $\{f, g, h\}$ es linealmente independiente.
10. Demuestra que entre todos los rectángulos de la misma área, el cuadrado es el que tiene el mínimo perímetro.