

Propuesta de Examen de Diagnóstico

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Mayo 2025

Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.

1. Sea dada la función $f(x) = x^3 + \sinh x + 2$. Recordemos que $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
 - a) Muestra que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ posee una función inversa.
 - b) Denotemos mediante h la inversa de f . Hallar los valores numéricos $h(2)$ y $h'(2)$.
2. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Se define la transformación $\star : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ determinada por $u \star v = u^T A v$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$, donde u^T denota la transpuesta de u . Muestra que $\star$ es un producto escalar (o producto interno) en $\mathbb{R}^3$.
3. Considera $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}$.
 - a) ¿Es posible aplicar la regla de L'Hôpital para calcular este límite? Justifica tu respuesta.
 - b) Calcula el límite.
4. Sean v_1, v_2, v_3, v_4 vectores en $\mathbb{R}^3$ cuyos productos punto satisfacen $v_i \cdot v_j < 0$ si $i \neq j$.
 - a) Da un ejemplo de cuatro vectores que cumplan esta propiedad.
 - b) Probar que si cuatro vectores cumplen esta propiedad, entonces cualesquiera tres de ellos forman una base de $\mathbb{R}^3$.
5. Responde lo siguiente.
 - a) Escribe la definición formal de elipse.
 - b) Usando cálculo, encuentra la fórmula para el área de una elipse.
6. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = az + b\bar{z}$, donde $a, b \in \mathbb{C}$.
 - a) Mostrar que f determina una función $\mathbb{R}$ -lineal.
 - b) Probar que f no es invertible si y solo si $|a| = |b|$.

7. Sean $a > 0$ y $f(x) = \int_0^{ax} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{1}{b} \sin(bx)}{x^3}$, con $b \neq 0$.
8. Sea X un conjunto. Por $K(X, \mathbb{R})$ denotamos al espacio vectorial de las funciones de X a $\mathbb{R}$. Dado $A \subseteq X$, definimos el conjunto $F(A) = \{f \in K(X, \mathbb{R}) \mid \forall b \notin A (f(b) = 0)\}$.
- a) Demuestra que $F(A)$ es un subespacio vectorial de $K(X, \mathbb{R})$.
 - b) Demuestra que si $\{P_1, \dots, P_n\}$ es una partición de X , entonces $K(X, \mathbb{R})$ es la suma directa de $F(P_1), \dots, F(P_n)$.
 - c) Demuestra que si X es finito, entonces $K(X, \mathbb{R})$ tiene dimensión finita y encuentra una base.
9. Una partícula se mueve en el eje x de manera que su posición al tiempo t es una función diferenciable $x(t)$ y su velocidad satisface $x' = x^2$.
- a) Si la partícula comienza su movimiento en $x = 1$ a tiempo $t = 0$, ¿cuánto tiempo tarda en recorrer el semieje $[1, \infty)$ en el eje de las x ?
 - b) Si la partícula comienza en $x = -1$ a tiempo $t = 0$, ¿cuánto tiempo tarda en llegar a $x = 0$? El recorrido es en el eje de las x .