

# Examen diagnóstico

Octubre 2022

Proyecto: 06/10/2022

1. Sea  $(x, y, z)$  un sistema de coordenadas cartesianas espaciales y sean

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

la base canónica en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ .

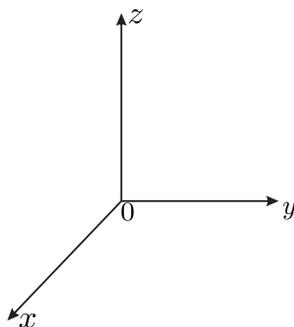


Figura 1:

Escribe la matriz asociada a la transformación “rotación” alrededor del eje  $z$  por  $\frac{\pi}{4}$  radianes en el sentido de las agujas de reloj. Exprésela usando la base ordenada  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  y justifique.

2. Demuestre que la ecuación  $x^5 + x^3 + x + 3 = 0$  tiene exactamente una raíz (en los números reales).
3. Encuentra una constante  $c$  que haga  $g(x)$  continua en  $(-\infty, \infty)$ :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 4, \\ cx + 20 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

4. Responda los siguientes incisos. Justifique su respuesta con detalle

(a) Sea  $a > 0$ . Calcule

$$\int_{-a}^a \sin x \, dx.$$

(b) ¿Existe  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \sin x \, dx$ ?

(c) ¿Existe  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx$ ?

5. Sea  $A$  una matriz tal que

$$A^2 = A.$$

¿Qué valores puede tener el determinante  $|A|$ ?

6. ¿Para qué valores  $a$  y  $b$  el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - z = a \\ ax - (a+1)y + z = -b \\ y - z = b \end{cases}$$

tiene al menos una solución?

7. Sea  $V$  un espacio vectorial con  $\dim(V) = 6$ . Si  $U, W$  son subespacios de  $V$  con  $\dim(U) = \dim(W) = 4$ , encuentra todos los posibles valores para  $\dim(U \cap W)$ . Justifica tu respuesta con detalle.

8. La ecuación de una parábola es  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Demuestra que existe un único punto  $p$  en la parábola tal que:

(a) La recta tangente a la parábola que pasa por  $p$  es paralela al eje  $x$ .

(b)  $p$  es un mínimo o máximo absoluto (es decir, no solo es local).

(c) Caracteriza cuando  $p$  es mínimo y cuando es máximo.

9. Sean  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  tres vectores linealmente independientes. Demuestra que los vectores  $u + v$ ,  $u - v$  y  $u - 2v + w$  son linealmente independientes.

10. ¿En qué puntos de la curva  $y = x^3 + 5$  su recta tangente es perpendicular a la recta  $x + 3y = 2$ ?