

Examen diagnóstico

Octubre 2022

Proyecto: 06/10/2022

1. Sea (x, y, z) un sistema de coordenadas cartesianas espaciales y sean

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

la base canónica en el espacio vectorial \mathbb{R}^3 .

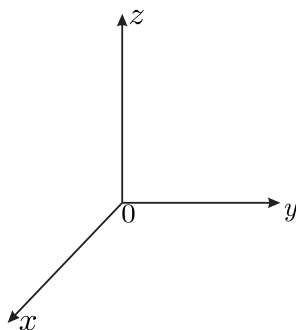


Figura 1:

Escribe la matriz asociada a la transformación “rotación” alrededor del eje z por $\frac{\pi}{4}$ radianes en el sentido de las agujas de reloj. Exprésela usando la base ordenada $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y justifique.

2. Demuestre que la ecuación $x^5 + x^3 + x + 3 = 0$ tiene exactamente una raíz (en los números reales).
3. Encuentra una constante c que haga $g(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 4, \\ cx + 20 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

4. Responda los siguientes incisos. Justifique su respuesta con detalle

(a) Sea $a > 0$. Calcule

$$\int_{-a}^a \sin x \, dx.$$

(b) ¿Existe $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \sin x \, dx$?

(c) ¿Existe $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx$?

5. Sea A una matriz tal que

$$A^2 = A.$$

¿Qué valores puede tener el determinante $|A|$?

6. ¿Para qué valores a y b el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - z = a \\ ax - (a+1)y + z = -b \\ y - z = b \end{cases}$$

tiene al menos una solución?

7. Sea V un espacio vectorial con $\dim(V) = 6$. Si U, W son subespacios de V con $\dim(U) = \dim(W) = 4$, encuentra todos los posibles valores para $\dim(U \cap W)$. Justifica tu respuesta con detalle.

8. La ecuación de una parábola es $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Demuestra que existe un único punto p en la parábola tal que:

(a) La recta tangente a la parábola que pasa por p es paralela al eje x .

(b) p es un mínimo o máximo absoluto (es decir, no solo es local).

(c) Caracteriza cuando p es mínimo y cuando es máximo.

9. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tres vectores linealmente independientes. Demuestra que los vectores $u + v$, $u - v$ y $u - 2v + w$ son linealmente independientes.

10. ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 + 5$ su recta tangente es perpendicular a la recta $x + 3y = 2$?