Borrador de Examen de Admisión

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

16 septiembre 2024

Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.

1. Considerar el conjunto de funciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ tales que $f(x, y) = f(y, x)$. Mostrar que este conjunto forma un espacio vectorial. Hallar su dimensión y una base.

2. Hallar todos los valores a con $a > 0$ para los cuales se satisface $\displaystyle\int_0^a (1 - x)dx \leq \frac{1 + a}{4}$.

3. Sea dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax - by = 0, \\ a^2x - by = ab. \end{cases}$ Hallar los valores de a y b para los cuales:

   a) el sistema tiene una única solución;

   b) el sistema tiene más de una solución;

   c) el sistema no tiene solución.

4. Usar cálculo para hallar el volumen de una esfera de radio r.

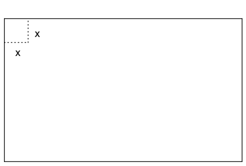
5. Sea $\mathbb{P}_3$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales.

   a) Mostrar que $\mathbb{P}_3$ es un espacio vectorial sobre los reales. ¿Cuál es su dimensión?

   b) Sea $V = \{p\,(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p\,(7) = 0 \text{ y } p\,(5) = 0\}$. Demostrar que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3$ y encontrar una base de V.

   c) ¿Es cierto que toda base de $\mathbb{P}_3$ debe tener al menos un polinomio de grado n para cada $n \leq 3$? Demostrar o dar un contraejemplo.

6. En una cartulina rectangular de lados 10 cm y 16 cm se cortan en las esquinas cuadrados de lado x (en la figura se muestra el corte en una esquina). Al doblar lo que queda al eliminar los cuadrados se construye una caja sin tapa. Determinar el valor de x para cual el volumen de la caja alcanza su valor máximo. Calcular el volumen correspondiente.



7. Dar la expresión de la transformación del plano cartesiano que consiste en rotar por ángulo $\pi/6$ alrededor del punto $(1, 2)$.

8. Enunciar los dos teoremas fundamentales del cálculo y demostrar uno de ellos.

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sean W y U subespacios de V.

   a) Mostrar que si $\dim(W) + \dim(U) > \dim(\mathrm{V})$, entonces $W \cap U$ no es el subespacio trivial.

   b) Demostrar que si $W \subseteq U$, entonces $W = U$ si y solo si W y U tienen la misma dimensión. ¿Esto sigue siendo cierto en caso de que V tenga dimensión infinita? Mostrar o dar un contraejemplo.

10. Analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.