Examen de admisión al PCCM, Noviembre 2020.

1. Al lado de un gran muro de una granja, se requiere cercar un terreno que tenga forma rectangular. Se dispone solamente de 100 metros de malla de alambre para construir la cerca (la cual tendrá tres lados, de manera que el cuarto lado del rectángulo será el muro). ¿Qué dimensiones debe tener el terreno cercado para que éste encierre la mayor área posible?

2. ¿Para qué valores de a y b el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad\quad\quad + z &= a \\ ax + (1-2a)y - z &= b \\ \quad\quad -y - 2z &= -b \end{cases}$$

   tiene una única solución? Describe las soluciones.
   ¿Para qué valores de a y b el sistema no tiene soluciones?
   ¿Para qué valores de a y b el sistema tiene una infinidad de soluciones? Describe las soluciones.

3. Sea $\{x_n\}_n, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de Cauchy y $x_{n_k} \to y$ una subsucesión convergente cuando $k \to \infty$. Usando argumentos tipo ϵ, N prueba que $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.

4. Considera M una matriz 2×2 con entradas reales de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Prueba que esta matriz es semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

5. Considera una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable sobre $[a, b]$ tal que $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Prueba que $\inf\{x > a \,:\, f(x) < 0\} > a$.

6. Sea $V \subseteq \mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado a lo más cuatro. Dado $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in V$, sea $D_f : V \to V$ la transformación lineal

$$D_f(g) = a_0 g + a_1 \frac{d}{dx} g + a_2 \frac{d^2}{dx^2} g + a_3 \frac{d^3}{dx^3} g + a_4 \frac{d^4}{dx^4} g \qquad \forall g \in V.$$

   Escribe la matriz asociada a la transformación lineal D_f empleando la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ de V. ¿Cómo deben ser los coeficientes de f para que D_f sea un isomorfismo entre espacios vectoriales ?

7. Indicar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$

   converge.

8. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo F y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.

   (a) Demuestra que $\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$ (recordar que $Im(T)$ denota la imagen de T y $Ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$).

   (b) Demuestra que si $\dim(V) = \dim(W)$, entonces T es inyectiva si y solo si T es sobreyectiva.

9. Calcule el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Diga si la matriz es o no diagonalizable. Si es diagonalizable, encontrar la matriz de transformación.

10. (a) Encontrar $\lim_{n\to\infty} \int_0^a e^{-nx^2}\, dx$ donde $a > 0$.

    (b) Encontrar $\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-nx^2}\, dx$.