

Examen de Diagnóstico

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Octubre 2025

Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.

1. Encontrar el punto en la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia a $(1, 0)$ es mínima.
2. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b + 1)y = 2b + 4, \end{cases}$$

hallar los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los cuales:

- a) el sistema tiene una única solución;
 - b) el sistema tiene más de una solución;
 - c) el sistema no tiene solución.
3. Hallar todos los valores de $p \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$y(x) = -x^3 + 3x + 5$$

es decreciente en el intervalo $\left(p, p + \frac{1}{2}\right)$.

4. Determinar si existen valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que los planos en \mathbb{R}^3 definidos por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda x + (2 - \lambda)y + (2\lambda - 1)z &= 0, \\ (2 - \lambda)x + (3\lambda - 2)y + z &= 0, \end{aligned}$$

se intersectan en una recta ortogonal al vector $(1, -1, 3)$.

5. Hallar todos los valores positivos de a para los cuales el área de la figura limitada por las curvas

$$y = e^x, \quad y = 0, \quad x = -a, \quad x = a,$$

es mayor que $3/2$.

6. Investigar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

7. Sean $v_1, \dots, v_5 \in \mathbb{R}^3$ vectores arbitrarios expresados como renglón, y sea \cdot el producto punto en \mathbb{R}^3 . Probar que

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v_4 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} v_5 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_4 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 \\ v_2 \cdot v_4 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_4 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} v_5 \cdot v_5 & v_5 \cdot v_2 & v_5 \cdot v_3 \\ v_2 \cdot v_5 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_5 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 \end{pmatrix}.$$

8. Sea V un espacio vectorial. Demostrar que V tiene dimensión finita si y solo si todo subespacio vectorial propio de V tiene dimensión finita.
9. En cada inciso, encontrar una función con las propiedades requeridas. (Se admite una descripción cualitativa precisa de la función, sin necesidad de proporcionar una fórmula analítica explícita.)
- Una función de \mathbb{R} a \mathbb{R} que tenga exactamente un punto de continuidad.
 - Una función de \mathbb{R} a \mathbb{R} que tenga exactamente una cantidad infinita numerable de puntos de continuidad.
10. *a)* Mostrar que toda función lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 manda segmentos en segmentos y que el punto medio de un segmento es enviado en el punto medio de su imagen.
- b)* Describir la imagen de una circunferencia bajo un isomorfismo lineal de \mathbb{R}^2 .
- c)* Mostrar que para todo triángulo en \mathbb{R}^2 existe una elipse que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo y es tangente a los lados del triángulo.