

Examen General de Álgebra Conmutativa
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH
Viernes 23 de Junio de 2017. Duración 4 horas

1. Sean A, B anillos tal que B es un A -módulo finitamente generado. Sea $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado. Sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de anillos y sea $T = f(S)$. Prueba que:
 - (i). T es un conjunto multiplicativamente cerrado.
 - (ii). Prueba que el homomorfismo inducido $f_S : S^{-1}A \rightarrow T^{-1}B$ le da estructura a $T^{-1}B$ de un $S^{-1}A$ -módulo finitamente generado.
2. (a) Sea K un campo y sea A el anillo $\frac{K[X, Y, Z]}{(XY - Z^2)}$. Denotaremos por x, y, z las clases de X, Y, Z respectivamente, en A . Prueba que el ideal (x, z) es primo y que $(x, z)^2$ no es primario.
(b) En el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[T]$, prueba que el ideal $m = (2, T)$ es maximal y el ideal $q = (4, T)$ es primario, pero no es una potencia de m .
3. (a) Sean r un entero positivo y A un anillo. Sean M_1, \dots, M_r módulos sobre A . Prueba que $\text{Ass}_A(\bigoplus_{i=1}^{i=r} M_i) = \bigcup_{i=1}^{i=r} \text{Ass}_A(M_i)$.
(b) Determine $\text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}})$.
4. Sea M un A -módulo finitamente generado y sea $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. Prueba que $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)$ si y solo si $\text{ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}$. Aquí, $\text{ann}(M)$ denota el aniquilador de M .
5. Sea A un anillo Noetheriano y sea $I \subset A$ un ideal tal que cada elemento de $1 + I$ es invertible en A . Demuestra que $\bigcap_{n>0} I^n = (0)$.
6. Sea A un anillo artiniiano. Prueba que $\text{Spec}(A)$ es discreto.
7. Sea (A, \mathfrak{m}) un dominio entero local tal que $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$ y \mathfrak{m} es principal. Prueba que para todo ideal no nulo I de A , se tiene que $I = \mathfrak{m}^n$ para algún n .