

Álgebra Conmutativa
enero 2020

1. Sea k un campo y $A = k[x, y, z]$. Sean $I_1 = (x, y)$, $I_2 = (x, z)$, $m = (x, y, z)$ ideales en A . Sea $J = I_1 \cdot I_2$. Demuestra que

$$J = I_1 \cap I_2 \cap m^2$$

es una descomposición primaria reducida para J . Describe quienes son las componentes encajadas y cuales son las componentes aisladas en esta descomposición.

2. Sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo entero de anillos. Demuestra que

$$f^* : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$$

es una aplicación cerrada, es decir, manda conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.

3. Sean M, N dos A -módulos finitamente generados. Demuestra que

$$\text{Supp}(M \otimes_A N) = \text{Supp}(M) \cap \text{Supp}(N)$$

4. Sea R el subanillo de $\mathbb{Z}[X]$ que consiste de todos los polinomios donde el coeficiente de X y de X^2 son cero.

a) Prueba que el campo de fracciones de R es $\mathbb{Q}[X]$.

b) Encuentra la cerradura entera de R en $\mathbb{Q}[X]$.

c) Dado cualquier ideal maximal P de $\mathbb{Z}[X]$ prueba que $P \cap R$ es maximal.

5. Sea $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ una sucesión exacta de módulos sobre un anillo A . Demuestra que si M y P son noetherianos, entonces N es noetheriano.

6. Sea M un A -módulo e I un ideal de A tal que $M_{\mathfrak{p}} = \{0\}$ para cualquier ideal maximal \mathfrak{p} con $I \subseteq \mathfrak{p}$. Demuestra que $M = IM$.

7. Sea A un dominio de factorización única. Demuestra que A es enteramente cerrado en $\text{Frac}(A)$.

8. Sea R un anillo noetheriano, I un ideal de R y \hat{R} la completación I -ádica. Sea $x \in R$ y sea \hat{x} su imagen en \hat{R} . Prueba que si x no es divisor de cero en R entonces \hat{x} no es divisor de cero en \hat{R} .