

**Examen General de Álgebra Conmutativa**  
**Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH**  
**Martes 29 de Junio de 2021. Duración 4 horas**

1. Sea  $P$  un ideal maximal en un anillo  $A$ . Si un ideal  $Q \subset A$  satisface una de las siguientes condiciones:
  - (i).  $\sqrt{Q} = P$
  - (ii).  $P^n \subset Q \subset P$  para algún entero positivo  $n > 0$ ;prueba que  $Q$  es  $P$ -primario.
2. Sea  $M$  un módulo sobre un anillo  $A$ . Sea  $J$  un ideal de  $A$ . Supongamos que  $P \cdot M = 0$  para todo ideal maximal  $P$  de  $A$  con  $J \subseteq P$ .  
¿Es verdad que  $M = 0$ ? Demuéstralo o da un contraejemplo y explicarlo.
3. Sea  $(A, \mathfrak{m})$  un anillo local y sea  $P$  un  $A$ -módulo proyectivo finitamente generado. Demuestra que  $P$  es un  $A$ -módulo libre.
4. Sea  $A$  un anillo. Demuestra que  $\text{Spec}(A)$  es desconexo, si y sólo si,  $A$  contiene un elemento idempotente  $e$  ( $e^2 = e$ ) distinto de 0 y 1.
5. Sean  $k$  un campo y  $R$  el anillo  $k[x, y, z]$  de polinomios en las variables  $x, y, z$  sobre  $k$ . Sean  $P_1 = \langle x, z \rangle$ ,  $P_2 = \langle x, z \rangle$ , y  $\mathfrak{M} = \langle x, y, z \rangle$  ideales de  $R$ .
  - (a) Demostrar que  $P_1$  y  $P_2$  son primos.
  - (b) Demostrar que  $P_1 \cap P_2 \cap \mathfrak{M}^2$  es una descomposición primaria de  $P_1 \cdot P_2$ .
  - (c) ¿Cuáles son los componentes minimales y las componentes encajadas de  $P_1 \cdot P_2$ ?
6. Sean  $(A, \mathfrak{M})$  un anillo local y  $N, M$   $A$ -módulos finitamente generados. Sean  $f, g : M \rightarrow N$  homomorfismos de  $A$ -módulos. Supongamos que  $f$  es un isomorfismo y que  $g(M) \subset \mathfrak{M} \cdot N$ . Probar que  $f + g$  es isomorfismo.
7. Determine  $\text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}})$ . Justificar su respuesta.
8. Sea  $A$  un subanillo de un anillo  $B$ . Sean  $b_1, \dots, b_r$  elementos de  $B$  ( $r \in \mathbb{N}$ ). Prueba que si  $b_i$  es entero sobre  $A$  para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , entonces los anillos  $A$  y  $A[b_1, \dots, b_r]$  tienen la misma dimensión de Krull.
9. Sea  $A$  un anillo y sea  $A[x, y, z]$  el anillo de polinomios en las variables  $x, y, z$  sobre  $A$ . Prueba que  $A[x, y, z]$  es plano sobre  $A$ .