

EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH
LUNES 20 DE ENERO DE 2025. DURACIÓN 4 HORAS

Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Sea R un anillo y S una R -álgebra fielmente plana. Pruebe que si S es noetheriano, entonces R es noetheriano.
2. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local. Entonces R/\mathfrak{m} es un R -módulo plano si y solo si $\mathfrak{m} = 0$.
3. Sean K un campo y R un anillo que contiene a K . Sea $r \in R$ distinto de cero. Demuestre que si $K[r]$ es un campo, entonces $K[r]$ es una extensión finita de K .
4. Sean R un anillo noetheriano y M un R -módulo finitamente generado. Muestre que si \mathfrak{p} es maximal en $\text{Ass}(M)$, entonces $M_1 = \text{Ann}_M(\mathfrak{p})$ es un módulo libre de torsión sobre R/\mathfrak{p} .
5. Sea R un anillo noetheriano. Sea x_1, \dots, x_u una sucesión en $R \setminus \{0\}$ tal que los ideales $(x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_1, \dots, x_u)$ son primos distintos. Sea \mathfrak{q} un ideal primo de R tal que $(x_1, \dots, x_u) \subseteq \mathfrak{q}$. Muestre que si $\text{ht}((x_1)) = 1$, entonces x_1, \dots, x_u son parte de un sistema de parámetros para $R_{\mathfrak{q}}$.
6. Sea $R \subseteq S$ una extensión finita de anillos noetherianos. Muestre que el conjunto $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid R_{\mathfrak{p}} \subseteq S_{\mathfrak{p}} \text{ se escinde}\}$ es un abierto en la topología de Zariski.
7. Sean R un anillo noetheriano y $\mathfrak{q} \subseteq R$ un ideal \mathfrak{p} -primario. Considere las cadenas
$$\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_0 \subsetneq \mathfrak{a}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{a}_{t-1} \subsetneq \mathfrak{a}_t = \mathfrak{p}$$
donde cada \mathfrak{a}_j es \mathfrak{p} -primario. Demuestre que todas estas cadenas tienen longitud finita acotada, y que las cadenas maximales tienen la misma longitud.
Pista: Reducir al caso de un anillo local artiniano.
8. Sea R anillo noetheriano de dimensión mayor o igual a 2. Pruebe que $\text{Spec}(R)$ es infinito.