

1. Sea  $A \leq B$  una extensión entera de anillos. Prueba que si  $J(R)$  denota el radical de Jacobson del anillo  $R$  entonces  $J(B) \cap A = J(A)$ ,

2. Prueba que cualquier dominio entero finito es un campo.

3. Sea  $A \leq B$  extensión de anillos tal que  $B$  es finitamente generado sobre  $A$  como  $A$ -módulo. Prueba que para cada  $P \in \text{Spec}(A)$  hay un número finito de  $Q \in \text{Spec}(B)$  tal que  $Q \cap A = P$ .

4. Sea  $A$  un dominio entero. Prueba que  $A$  es un dominio de factorización única si y sólo si todo elemento irreducible es primo y los ideales principales satisfacen la condición de cadena ascendente.

5.- Sea  $A$  anillo Noetheriano y  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Sea  $h : M \rightarrow M$  un homomorfismo de  $A$ -módulos sobreectivo, prueba que  $h$  es un isomorfismo.

6.- Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos. Decimos que  $\phi$  tiene la propiedad del Ascenso( resp. la propiedad del Descenso) si la conclusión del teorema del Ascenso (resp. del teorema del Descenso) es válida para  $B$  y su subanillo  $\phi(A) \subseteq B$ . Considera las siguientes afirmaciones:

(i).- La aplicación inducida  $\phi^\# : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  es una aplicación cerrada.

(ii).-  $\phi$  tiene la propiedad del Ascenso.

(iii).- Sea  $Q \in \text{Spec}(B)$ , y sea  $P = Q^c$  ( la contracción de  $Q$  bajo  $f$ ), entonces la aplicación inducida  $\text{Spec}(B/Q) \rightarrow \text{Spec}(A/P)$  es sobreectiva.

Demuestra que  $(i) \rightarrow (ii) \iff (iii)$

7.- Sea  $A$  anillo Noetheriano y  $M, N$   $A$ -módulos finitamente generados. Demuestra que  $\text{Hom}_A(M, N)$  es finitamente generado y que  $\text{Ass}(\text{Hom}_A(M, N)) = \text{Supp}(M) \cap \text{Ass}(N)$ .

8.- Sean  $P_1 = (x, y), P_2 = (x, z), \mathfrak{m} = (x, y, z) \in k[x, y, z]$ . Sea  $I = P_1 \cdot P_2$ . Demuestra que  $P_1 \cap P_2 \cap \mathfrak{m}^2$  es una descomposición primaria de  $I$ . Cuales son las componentes aisladas y cuales son las componentes encajadas de  $I$  ?