

# Examen Básico de Álgebra Conmutativa

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH

Lunes 10 de Enero de 2022 de las 09:00 horas a las 13:00 horas.

1. Sea  $A$  un anillo. Prueba que la longitud de  $A$  es finita, si y sólo si, es noetheriano y de dimensión igual a cero.
2. Sea  $A$  un anillo artiniiano. Prueba que  $\text{Spec}(A)$  es discreto.
3. ¿Un módulo proyectivo finitamente generado sobre un anillo local es un módulo libre? Justifica su respuesta.
4. Sea  $A \leq B$  extensión entera de anillos. Sea  $K$  un campo algebraicamente cerrado. Sea  $f : A \rightarrow K$  morfismo de anillos. Prueba que existe  $\hat{f} : B \rightarrow K$  de anillos que extiende a  $f$ . (Sugerencia: “going-up”)
5. Sea  $A$  un anillo Noetheriano. Sea  $M$  un  $A$ -módulo de longitud finita. Prueba que  $\text{Ass}(M)$  es finito.
6. Sea  $A$  un anillo de Dedekind. Sea  $I$  un ideal no cero de  $A$ . Prueba que todo ideal de  $A/I$  es principal. Concluye que todo ideal de  $A$  está generado por a lo más dos elementos.
7. Sea  $A$  un anillo noetheriano y sean  $M_1, \dots, M_n$   $A$ -módulos finitamente generados. Prueba que  $\text{Ass}(\bigoplus_{i=1}^n M_i) = \bigcup_{i=1}^n \text{Ass}(M_i)$ .
8. Sea  $A \leq B$  una extensión entera de anillos. Supóngase que como  $A$ -módulo,  $B$  es finitamente generado por  $N$  elementos. Demuestra que para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ , existen a lo mucho  $N$  ideales primos  $\mathfrak{n}$  de  $B$  tales que  $A \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ .
9. Demuestra que un anillo de valoración es noetheriano si y sólo si es de valoración discreta.