

EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH
20 DE JUNIO DE 2022. DURACIÓN: 4 HORAS

Ejercicio 1. Demuestra o da un contraejemplo: si A es un anillo noetheriano y B es un subanillo de A , entonces B es noetheriano.

Ejercicio 2.

- (1) Considera el anillo $A = k[x, y]$, donde k es un campo, y el ideal $I = \langle x^2, xy \rangle$ de A . Considera los ideales $\mathfrak{q}_1 = \langle x \rangle$ y $\mathfrak{q}_2 = \langle x, y \rangle^2$ de A . Demuestra que $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ es una descomposición primaria minimal y determina las componentes aisladas e inmersas.
- (2) Determina las componentes aisladas e inmersas del ideal $20\mathbb{Z}$ de \mathbb{Z} .

Ejercicio 3. Sea M un A -módulo. El *soporte de M en A* está dado por

$$\text{Supp}_A(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq \{0_M\}\}.$$

- (1) Demuestra que $\text{Ass}_A(M) \subseteq \text{Supp}_A(M)$.
- (2) Sea p un número primo. Determina $\text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})$.

Ejercicio 4. Sean M un A -módulo y $\varphi : M \rightarrow M$ una aplicación A -lineal. Demuestra que si M es artiniiano y φ es inyectiva, entonces φ es un isomorfismo.

Ejercicio 5. Sea A un anillo noetheriano y M un A -módulo finitamente generado. Sea $h : M \rightarrow M$ un homomorfismo de A -módulos sobreyectivo. Mostrar que h es un isomorfismo.

Ejercicio 6. Sean $A \subset B$ anillos tales que el conjunto $B \setminus A$ es un conjunto cerrado bajo multiplicación. Muestre que A es enteramente cerrado en B .

Ejercicio 7. Sea (A, \mathfrak{m}) un anillo artiniiano local con campo residual k . Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) Cada ideal en A es principal.
- (2) El ideal \mathfrak{m} es principal.
- (3) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$.

(Sugerencia: Recordar que en un anillo artiniiano el nilradical es nilpotente.)

Ejercicio 8. Sea I un ideal de un dominio entero noetheriano A . Demuestra o da un contraejemplo: el ideal $\bigcap_{r=0}^{+\infty} I^r$ de A no es el ideal nulo, si y solo si, I es igual a A .