

Examen General de Álgebra Conmutativa
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH
Martes 29 de Junio de 2021. Duración 4 horas

1. Sea P un ideal maximal en un anillo A . Si un ideal $Q \subset A$ satisface una de las siguientes condiciones:
 - (i). $\sqrt{Q} = P$
 - (ii). $P^n \subset Q \subset P$ para algún entero positivo $n > 0$;prueba que Q es P -primario.
2. Sea M un módulo sobre un anillo A . Sea J un ideal de A . Supongamos que $P \cdot M = 0$ para todo ideal maximal P de A con $J \subseteq P$.
¿Es verdad que $M = 0$? Demuéstralo o da un contraejemplo y explicarlo.
3. Sea (A, \mathfrak{m}) un anillo local y sea P un A -módulo proyectivo finitamente generado. Demuestra que P es un A -módulo libre.
4. Sea A un anillo. Demuestra que $\text{Spec}(A)$ es desconexo, si y sólo si, A contiene un elemento idempotente e ($e^2 = e$) distinto de 0 y 1.
5. Sean k un campo y R el anillo $k[x, y, z]$ de polinomios en las variables x, y, z sobre k . Sean $P_1 = \langle x, z \rangle$, $P_2 = \langle x, z \rangle$, y $\mathfrak{M} = \langle x, y, z \rangle$ ideales de R .
 - (a) Demostrar que P_1 y P_2 son primos.
 - (b) Demostrar que $P_1 \cap P_2 \cap \mathfrak{M}^2$ es una descomposición primaria de $P_1 \cdot P_2$.
 - (c) ¿Cuáles son los componentes minimales y las componentes encajadas de $P_1 \cdot P_2$?
6. Sean (A, \mathfrak{M}) un anillo local y N, M A -módulos finitamente generados. Sean $f, g : M \rightarrow N$ homomorfismos de A -módulos. Supongamos que f es un isomorfismo y que $g(M) \subset \mathfrak{M} \cdot N$. Probar que $f + g$ es isomorfismo.
7. Determine $\text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}})$. Justificar su respuesta.
8. Sea A un subanillo de un anillo B . Sean b_1, \dots, b_r elementos de B ($r \in \mathbb{N}$). Prueba que si b_i es entero sobre A para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces los anillos A y $A[b_1, \dots, b_r]$ tienen la misma dimensión de Krull.
9. Sea A un anillo y sea $A[x, y, z]$ el anillo de polinomios en las variables x, y, z sobre A . Prueba que $A[x, y, z]$ es plano sobre A .