

**Examen Básico de Álgebra Conmutativa**  
**Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH**  
**Lunes 15 de febrero de 2021. Duración 4 horas**

Suponemos que todos los anillos que aparecen más abajo son conmutativos.

1. Encuentra las componentes irreducibles de  $X = \text{Spec}(\mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[y])$  y de  $Y = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(xy))$ .
2. Sea  $A$  un anillo.
  - (a) Sea  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  una sucesión exacta de  $A$ -módulos. Muestra que  $\text{Ass}_A(M') \subseteq \text{Ass}_A(M) \subseteq \text{Ass}_A(M') \cup \text{Ass}_A(M'')$ .
  - (b) Determina  $\text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}})$  y  $\text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\frac{\mathbb{Z}}{p^2\mathbb{Z}})$ , para  $p$  número primo.
3. Sea  $A \leq B$  una extensión entera de anillos y sea  $p$  un ideal primo de  $A$ . Supongamos que sólo existe un ideal primo  $P$  de  $B$  tal que  $P \cap A = p$ . Prueba que  $B_p = B_P$ . Sugerencia: Muestra primero que  $B_p$  es anillo local con ideal maximal  $PB_p$ .
4. Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos locales tal que  $\phi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$ , donde  $\mathfrak{m}$  y  $\mathfrak{n}$  denotan los ideales maximales de  $A$  y  $B$ , respectivamente. Sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Muestra que  $M \otimes_A B = 0$  implica que  $M = 0$ .
5. Sea  $A \leq B$  una extensión entera de anillos y sea  $f : A \rightarrow k$  un morfismo de anillos donde  $k$  es un campo algebraicamente cerrado. Prueba que existe un morfismo de anillos  $\hat{f} : B \rightarrow k$  que extiende a  $f$ .
6. Sea  $A$  un anillo y  $X = \text{Spec}(A)$ . Sea  $C$  un subconjunto abierto y cerrado de  $X$  en la topología de Zariski.
  - (a) Prueba que existe un idempotente  $e$  de  $A$  tal que  $C = V(e)$ .
  - (b) Prueba que si además  $C$  es componente conexa de  $X$  entonces  $1 - e$  es un idempotente primitivo de  $A$ .
7. Sea  $A$  un anillo noetheriano y sea  $I \subset A$  un ideal tal que cada elemento de  $1 + I$  es invertible en  $A$ . Demuestra que  $\bigcap_{n \geq 0} I^n = (0)$ .