

**EXAMEN DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA**  
**POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
**UNAM-UMSNH**  
**26 DE JUNIO DE 2023**

- (1) Sean  $A$  un anillo e  $I$  un ideal finitamente generado tal que  $I^2 = I$ .  
 Mostrar que  $I$  es generado por un elemento  $a \in A$  tal que  $a^2 = a$ .
- (2) Una sucesión exacta de  $A$ -módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow 0$$

se escinde si y sólo si existe un homomorfismo  $h : M_2 \rightarrow M$  tal que  $f \circ h = Id_{M_2}$ . Concluir de la definición anterior que  $M \cong M_1 \oplus M_2$ .

- (3) Sean  $(A, \mathfrak{m})$  y  $(B, \mathfrak{n})$  anillos locales. Sea  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorfismo tal que  $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$ . Sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Mostrar que  $M \otimes_A B = 0$  implica que  $M = 0$ .
- (4) Sean  $A$  un anillo noetheriano y  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Mostrar que  $M$  tiene una filtración finita de submódulos:
- $$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M$$
- donde  $M_{i+1}/M_i \cong A/P_i$  para algún ideal primo  $P_i$  de  $A$ . Concluye que  $Asoc(M)$  es finito.
- (5) Sea  $A = k[x, y]$ , donde  $k$  es un campo, e  $I = \langle x^2, xy \rangle$ . Considerar los ideales  $q_1 = \langle x \rangle$  y  $q_2 = \langle x, y \rangle^2$  de  $A$ . Mostrar que  $I = q_1 \cap q_2$  es una descomposición primaria minimal y determinar los primos minimales y encajados de  $I$ .
- (6) Sea  $A \subset B$  una extensión entera de anillos. Sea  $K$  un campo algebraicamente cerrado. Sea  $f : A \rightarrow K$  un morfismo de anillos. Mostrar que existe un morfismo de anillos  $\tilde{f} : B \rightarrow K$  que extiende a  $f$ . (*Sugerencia: teorema del ascenso.*)
- (7) Sea  $A$  un anillo de Dedekind. Sea  $I$  un ideal no cero de  $A$ . Mostrar que todo ideal de  $\frac{A}{I}$  es principal. ¿Es cierto que todo ideal de  $A$  está generado por a lo más dos elementos? Justifica tu respuesta.
- (8) Sea  $P$  un ideal maximal del anillo  $\mathbb{Z}$ . Mostrar que  $\mathbb{Z}_P$  no es un anillo artinian.