

Examen Básico de Álgebra Conmutativa

Enero 2024

Resuelve seis de los siguientes problemas. El examen dura cuatro horas.

1. Sean A un anillo e I un ideal de A finitamente generado tal que $I^2 = I$. Demuestra que I es principal y está generado por un elemento idempotente. *Sugerencia.* Usa alguna de las versiones del lema de Nakayama.

2. Para cada polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ denotamos mediante f_0 al término constante de f . Sean $A = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f_0 \in \mathbb{Z}\}$ e $I = \{f \in A \mid f_0 = 0\}$. Demuestra que I es un ideal de A que no es finitamente generado.

3. Sean A un anillo local, \mathfrak{m} su ideal maximal y $k = A/\mathfrak{m}$ su campo residual. Supóngase que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^n = 0$. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Cada ideal en A es principal.
- (b) El ideal \mathfrak{m} es principal.
- (c) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$.

4. Sean G un grupo finito de automorfismos de un anillo A y

$$A^G = \{x \in A \mid \sigma(x) = x \text{ para toda } \sigma \in G\}$$

el conjunto de elementos G -invariantes de A . Demuestra que si A es un dominio integralmente cerrado, entonces A^G es integralmente cerrado.

5. Sea k un campo. Considérese el ideal $I = \langle xy, x - yz \rangle \subseteq k[x, y, z]$. Sean $\mathfrak{q}_1 = \langle x, z \rangle$ y $\mathfrak{q}_2 = \langle y^2, x - yz \rangle$. Estos ideales son primarios. Demuestra que:

- (a) $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$.
- (b) La igualdad en (a) es una descomposición primaria irredundante.
- (c) ¿Cuáles son las componentes mínimas y encajadas?

6. Sean $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ ideales primos de un anillo A tales que $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ para cada $i \neq j$. Sea $U = A \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Demuestra que:

- (a) U es un conjunto multiplicativo.
- (b) $U^{-1}\mathfrak{p}_1, \dots, U^{-1}\mathfrak{p}_n$ son los únicos ideales maximales de $U^{-1}A$.

7. Sea A un anillo. Demuestra que A es noetheriano si y solo si hay un A -módulo noetheriano y fiel.