

Examen general básico de álgebra conmutativa.
PCCM, UNAM-UMSNH. Junio de 2018.
Tienen 4 horas para resolver el examen

1. Sea A anillo Noetheriano de dimensión de Krull cero. Prueba que A es un anillo Artiniano.
2. Sean $A \leq B$ anillos, B entero sobre A . Sea $P \in \text{Spec}(A)$. Supongase que existen al menos dos elementos distintos $Q_1, Q_2 \in \text{Spec}(B)$ que están sobre P . Demuestra que B_{Q_1} no es entero sobre A_P . Sugerencia: Demuestra que si $q \in Q_2$ y $q \notin Q_1$, entonces $\frac{1}{q} \in B_{Q_1}$ no es entero sobre A_P .
3. Sea k campo y $R = k[x, y, z]$. Sea $I = (xy, x - yz)$. Sean $Q_1 = (x, z), Q_2 = (y^2, x - yz)$. Demuestra que
 - (i) Se cumple que $I = Q_1 \cap Q_2$.
 - (ii) La igualdad en (i) es una descomposición primaria irredundante. Cuales son las componentes minimales y cuales las componentes encajadas en esta descomposición para I ?
4. Sean A un anillo, M un A -módulo y J un ideal de A . Supongamos que $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal \mathfrak{m} de A tal que $J \subset \mathfrak{m}$. Demuestra que $M = JM$.
5. Sean $A \leq B$ extensión entera de anillos, sea k un campo algebraicamente cerrado. Sea $f : A \rightarrow k$ morfismo de anillos. Prueba que existe un morfismo de anillos $f' : B \rightarrow k$ such that f' extends f . Sugerencia: “Going up”.
6. Sea A un anillo de Dedekind. Un A -módulo M es plano si y sólo si es libre de torsión.
7. Sea A un anillo local. Sean M y N A -módulos finitamente generados. Supongamos que $M \otimes_A N = 0$. Prueba que $M = 0$ o que $N = 0$.
8. Sea A anillo con la propiedad que cualquier ideal tiene descomposición primaria. Prueba que cualquier localización de A tiene esta propiedad.