

**EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA**  
**POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS**  
**MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH**

23 DE ENERO DE 2023 DE LAS 09:00 HORAS A LAS 13:00 HORAS.

**Ejercicio 1.** Sea  $A$  un dominio de factorización única. Demuestra que  $A$  es normal, es decir, que  $A$  es enteramente cerrado sobre  $\text{Frac}(A)$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $I$  un ideal descomponible de un anillo  $A$ . Demuestra que  $I$  es primario si y sólo si tiene un único ideal primo que pertenece a  $I$ .

**Ejercicio 3.** Sean  $A \subseteq B$  anillos tales que  $B$  es entero sobre  $A$ . Demuestra que  $\dim(A) \leq \dim(B)$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $A$  un anillo y  $A[x]$  el anillo de polinomios en la variable  $x$ . Sea  $\mathfrak{m} \subset A$  un ideal maximal. Mostrar que existe un ideal maximal  $\mathfrak{n} \subset A[x]$  tal que  $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $P$  un ideal primo de un anillo  $A$  y sea  $n$  un número natural. Definimos  $P^{(n)} := P^n A_P \cap A$ . Mostrar que  $P^{(n)}$  es un ideal primario y que su radical es  $P$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $A$  un anillo local y sean  $M$  y  $N$   $A$ -módulos finitamente generados. Suponer que  $M \otimes_A N = 0$ . Mostrar que  $M = 0$  ó  $N = 0$ .

**Ejercicio 7.** Sean  $A$  un anillo noetheriano y  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Mostrar que existe una sucesión exacta corta de la forma

$$A^q \longrightarrow A^p \longrightarrow M \rightarrow 0.$$

**Ejercicio 8.** Sea  $A$  un anillo artiniiano. Prueba que  $\text{Spec}(A)$  es discreto.

**Ejercicio 9.** ¿Un módulo proyectivo finitamente generado sobre un anillo local es un módulo libre? Justifica su respuesta.