

Examen Básico de Análisis Numérico

Junio 2022

Resuelve 5 de los siguientes problemas

1. Demuestra la regla de cuadratura del punto medio

$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x)dx = hf\left(x_k + \frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{24}h^3 f'''(\xi), \quad x_k < \xi < x_k + h.$$

2. Estima el número de intervalos que se requieren para aproximar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con 8 cifras decimales utilizando la regla trapezoidal de cuadratura.
3. Asumiendo que $N(h)$ es una aproximación a M de la forma

$$M = N(h) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 + \dots$$

Usando los valores de $N(h)$, $N(h/3)$ y $N(h/9)$ deriva una aproximación de orden $O(h^6)$ a M .

4. (a) Enuncia las condiciones que debe cumplir un mapeo para ser considerado una contracción
- (b) Una función F es llamada una contracción iterada si existe $\lambda < 1$ tal que se cumple

$$|F(F(x)) - F(x)| \leq \lambda |F(x) - x|$$

- i. Muestra que toda contracción es una contracción iterada
- ii. Muestra que no toda contracción iterada es una contracción
- iii. Muestra que una contracción iterada no tiene que ser continua
5. Utiliza el método de diferencias divididas de Newton para interpolar los puntos de la siguiente tabla:

| | | | | |
|----|----|---|----|----|
| xi | 0 | 1 | 3 | 4 |
| yi | -5 | 1 | 25 | 55 |

6. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Obtén la descomposición LU de A

- (b) Escribe L como un producto de matrices elementales.
- (c) Encuentra todas las soluciones a $Ax = 0$.
- (d) Usa la descomposición LU de A para resolver el sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

7. (a) Encuentra la solución exacta al problema de cuadrados mínimos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Resuelve numéricamente el sistema para varios valores pequeños de ε usando
 - Solución de las Ecuaciones Normales.
 - Factorización QR .

Describe el comportamiento de las soluciones numéricas.

8. (a) Usa el Método de la potencia para aproximar el valor propio dominante y un vector propio correspondiente de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Calcular otro valor propio y un vector propio correspondiente.

9. Resuelve numéricamente el sistema

$$\begin{aligned} 16x^4 + 16y^4 + z^4 &= 16 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^3 - y &= 0 \end{aligned}$$

usando el Método de Newton.