

Examen del curso básico de análisis numérico

16 de septiembre 2020 de 10am a 1:30pm

Evaluadores:

Dr. Eugenio Azpeitia

Dr. Francisco Mota

Dr. Gerardo Tinoco

Duración del examen: 3h30min.

Seleccionar y responder 5 de las 9 preguntas.

Preguntas

1) Diseña un esquema iterativo para calcular el recíproco $1/\alpha$ de cualquier número positivo usando solamente sumas y multiplicaciones .

2) Usa la aproximación centrada

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

para calcular una aproximación a $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. ¿De qué orden es la aproximación a la segunda parcial?

3) Demuestra que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

4) Encontrar al menos tres soluciones reales del sistema

$$\sin x + y^2 + \ln z = 3$$

$$3x + 2^y - z^3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^3 = 6$$

5) Considere el sistema de cuadrados mínimos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde δ es un real.

- a) Calcule la solución exacta
- b) Calcule solución aproximada para valores de δ cercanos a 0, usando primero la solución de las ecuaciones normales y después usando factorización QR a través de Gram-Schmidt. Discuta sus resultados.

6) Para la función de Runge

$$f(t) = \frac{1}{1 + 25t^2}$$

- a) Calcule los polinomios de interpolación con 11 y 21 puntos equiespaciados en $[-1,1]$.
- b) Calcule los splines cúbicos correspondientes.
- c) Discuta los resultados obtenidos.

7) Dado el sistema $AX=B$ con

$$a_{ij} = \begin{cases} 8+i & i=j \\ i+j & i \neq j \end{cases} \quad i=1,2,3 \quad j=1,2,3 \quad \text{con } b_i = 2i; i=1,2,3$$

- a) Indica si se cumple alguna condición de convergencia para resolver con un método iterativo
- b) Comienza con un vector aproximación inicial $X_0=[1 \ 1 \ 1]^T$. Encuentra el vector diferencia en la tercera iteración, entre las soluciones calculadas con los metodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

El sistema expresado en termino de formulas, escrito en forma matricial es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 3 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- 8) Aproximar la función de variable real $f(x) = e^x \cos(x) + 1, 0 \leq x \leq \pi$ con el polinomio de segundo grado $P(x)$, que incuye ls puntos $f(0), f(\pi/2), f(\pi)$. Encontrar la magnitud del mayor error $E(x) = f(x) - p(x)$, que se producirá al usar esta aproximación. Resolver la ecuación lineal resultante con la formula de Newton con un error máximo de 0.0001.
- 9) Las matrices de Householder son muy importantes en varios métodos numéricos de algebra lineal:
 - a) Escribe la definicieon general de una matriz de Householder H.
 - b) A partir de la definición muestra que H es hermitiana y unitaria.

c) Dados dos vectores x y y , describe las condiciones de estos vectores para poder encontrar una matriz de Householder que satisfaga $Hx=y$. Muestra que estas condiciones se requieren.