

## EXAMEN GENERAL: ANÁLISIS COMPLEJO, JUNIO 2024.

1. a) ¿Existe una transformación de Moebius  $T(z)$  tal que envíe  
1 a 3,  $i$  a 4,  $-1$  a  $2+i$ ,  $-i$  a  $4+i$ ?  
b) Prueba que si  $T(z)$  es una transformación de Moebius que envía el eje real en sí mismo, entonces

$$\overline{T(z)} = T(\bar{z}).$$

2. Calcula la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx.$$

3. Considera  $G \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto conexo tal que  $G = \{\bar{z} : z \in G\}$ . Demuestra que para toda función holomorfa  $f(z)$  en  $G$  las siguientes condiciones son equivalentes:

- a)  $f(G \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ,  
b)  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ .

4. Para  $a > 1$ , determina el número de soluciones de la ecuación

$$e^{z-a} = z \quad \text{en el disco } B_1(0)$$

y muestra que dichas soluciones son reales. *Sugerencia:* compara el número de ceros de  $z \mapsto e^{z-a} - z$  y de  $z \mapsto z$  con ayuda del Teorema de Rouché.

5. Di como se expresan o calculan, los primeros tres términos de la serie de potencias alrededor de  $z = 0$ , de la función meromorfa

$$h(z) = e^z \left( \frac{2}{z-1-i} + \frac{3}{z-1-2i} \right).$$

Discute como es el radio de convergencia de dicha serie.

6. Considera la función meromorfa

$$r(z) = \left( \frac{A}{z+3i} + \frac{B}{z-3i} \right) z^2, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Dependiendo de  $A$ ,  $B$ , discute si existe o no una función meromorfa  $R(z)$  tal que

$$\frac{dR}{dz}(z) = r(z) \quad \text{en un dominio maximal adecuado } G \subseteq \mathbb{C}.$$