

1. Sea $f \in L^1(0, +\infty)$ y sea

$$E_n = \{x \in (0, +\infty) : |f(x)| \geq n\}.$$

Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu(E_n) = 0.$$

2. Sea $f \in L^p(0, \infty)$ con $1 < p < \infty$. Demostrar que

$$\int_a^{a+1} f d\mu \rightarrow 0$$

cuando $a \rightarrow \infty$.

3. Sea $f \in L^p(0, \infty)$ con $1 \leq p < \infty$. Demostrar que $\|f(\cdot) - f(\cdot + y)\|_{L^p} \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow 0$. Probar que este resultado no es válido para el caso de $p = \infty$.
4. Sea $f_n \in L^p(0, 1)$ para toda n natural, donde $1 \leq p < \infty$. Sea $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ puntualmente en casi todas partes y $f \in L^p(0, 1)$. Demostrar que $f_n \rightarrow f$ en $L^p(0, 1)$ cuando $n \rightarrow \infty$ si y solo si $\|f_n\|_{L^p} \rightarrow \|f\|_{L^p}$ para $n \rightarrow \infty$.
5. Consideramos \mathbb{R} con la medida de Lebesgue. Sea $N \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de medida cero. Probar que existe una función continua, creciente y acotada $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(x) = \infty$ para cada $x \in N$. [Sugerencia: Considerar una sucesión decreciente de conjuntos abiertos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $N \subseteq U_n$ y $\mu(U_n) < 2^{-n}$. (Usar el hecho de que la medida de Lebesgue es regular exterior.) Definir $\varphi_n(x) := \mu(U_n \cap [-\infty, x])$. Luego considerar la suma $\varphi := \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$.]
6. Sea (S, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida, $f_1, f_2 \in L^1(\mu, \mathbb{R})$ tal que $f_1 \geq 0$ y $f_2 \geq 0$.

- (a) Mostrar que son medidas finitas

$$\nu_i(A) := \int_A f_i d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

- (b) Si $\nu_1 \ll \nu_2$ (es decir $\nu_2(A) = 0$ implica $\nu_1(A) = 0$) encuentra explícitamente la derivada de Radon-Nikodym $d\nu_1/d\nu_2$, es decir $h \in L^1(\nu_2)$ tal que $\nu_1(A) = \int_A h d\nu_2$ para todo $A \in \mathcal{M}$.