

Examen de Análisis Real Junio 2015

- 1).- Pruebe o de un contraejemplo: Dado $K \subset \mathbb{R}$ compacto, entonces $m(\partial K) = 0$, donde m denota la medida de Lebesgue.
- 2).- Sea $f_n \in L^1(X, \mu)$, $f_n \rightarrow f$ uniformemente en X . Muestre que si $\mu(X) < \infty$ entonces $f \in L^1(X, \mu)$ y $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. Muestre que esto no se satisface si $X = \mathbb{R}$ y $\mu = m$ es la medida de Lebesgue.

- 3).- Sea $f(x) \in L^1(\mathbb{R}, m)$, donde m denota la medida de Lebesgue. Defina la transformada de Fourier de f por:

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x k} dx$$

Demuestre que $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}, m)$ y que \hat{f} es continua.

- 4).- Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en \mathbb{R} y $a > 0$. Suponga que

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) > a\}) < \infty.$$

Demuestre que $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq a$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

- 5).- Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables con dominio $[0, 1]$. Suponga que $\int_{[0,1]} |f_n| \rightarrow 0$. Demuestre que la sucesión $\{f_n\}$ converge a cero en medida.

- 6).- Sea $f(x) \in L^1(\mathbb{R}, m)$, si para cada conjunto medible E ,

$$\left| \int_E f \right| \leq m(E),$$

pruebe que $|f(x)| \leq 1$, para casi todo $x \in \mathbb{R}$.