

Posgrado en Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH.
Examen General de análisis complejo: 17 de enero 2018.

Instrucciones. Lee con cuidado los enunciados de los problemas. Para aprobar este examen se deben resolver un mínimo de 4 problemas por completo y correctamente.

Problema 1:

- (1) Utiliza el Teorema de Cauchy para derivadas para demostrar lo siguiente:
Consideremos f una función entera tal que

$$|f(z)| \leq M|z|^n,$$

para $|z|$ muy grande, M un número real positivo y n un entero. Demuestra que f es un polinomio de grado menor o igual a n .

- (2) Sea f una función entera tal que f tiene una singularidad no-esencial en infinito. Demuestra que f es un polinomio.

Problema 2: Demuestra que todos los ceros del polinomio

$$p(z) = z^8 + 3z^3 + 7z + 5$$

se encuentran en el anillo $A := \{z \in \mathbb{C} | \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{3}{2}\}$.

Problema 3: Muestra que los ceros de una función holomorfa (no idénticamente cero) definida sobre un abierto conexo no pueden acumularse en un punto interior de su dominio.

Problema 4: Sean f, g dos funciones analíticas en una región acotada D y continuas en su cerradura \bar{D} . Suponga que $f(z) = g(z)$ para todo z en la frontera de \bar{D} . Muestre usando el principio del máximo que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D$.

Problema 5: Escriba la función $\frac{z-1}{z+1}$ como serie de potencias en la variable $\frac{1}{z}$.

Problema 6: Calcule las siguientes integrales:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+a^4)^2}$, para $a > 0$

(2) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6} dx$

Problema 7: Sea \mathbb{E} el disco abierto unitario con centro en el origen $0 \in \mathbb{C}$. Sean $f, g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ funciones biyectivas holomorfas tal que $f(0) = g(0)$ y $f'(0) = g'(0)$. Supongamos que f' y g' no tienen ceros en común. Demuestra que $f = g$ en todo \mathbb{E} .

Problema 8: Sea $f(x)$ una función continua \mathbb{R} -valuada y que es cero fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$. Para $z \in \mathbb{C}$, definimos $F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(zx) dx$.

(i). Demuestra que F es entera como función de z .

(ii). Prueba que f y F no pueden coincidir en todo \mathbb{R} , a menos que f sea idénticamente la función cero.