

# Examen Básico de Análisis Complejo

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

10 de enero 2022

**Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.**

1. Para  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , sea  $f(z) = \begin{cases} x^4 - ix + iy^4 + y & \text{para } |z| < 2, \\ \ln(|x + iy|) + i \arg(x + iy) & \text{para } |z| > 2. \end{cases}$   
Bosquejar y describir el conjunto donde la función  $f(z)$  es diferenciable en el sentido complejo.  
Determinar el conjunto donde la función  $f(z)$  es analítica.

2. Hallar todas las funciones enteras  $g$  que satisfacen la igualdad

$$g''\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Sea  $D \subseteq \mathbb{C}$  abierto y  $z_0 \in D$ . Sean  $f, g : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas con singularidades esenciales en  $z_0$ . ¿Qué tipo de singularidades pueden ocurrir en  $z_0$  para el producto  $fg$ ? Comprobar su respuesta.

4. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx, \quad \text{b) } \oint_{\{|z|=2\}} \frac{\sin(z^2 - 1)}{z^3 - 10} dz.$$

5. a) Encontrar los ceros del polinomio  $p(z) = z^5 + 2z^3 + 4$  en el anillo  $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ .

- b) Encontrar los ceros del polinomio  $q(z) = z^5 + 6z^3 + z + 2$  en el disco  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

6. Sea  $f(z) := \frac{1}{z(z-1)}$ . Mostrar que  $f$  es integrable (es decir  $f$  es derivada de una función holomorfa) en  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ .

7. Calcular la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx.$$

8. Para  $r > 0$ , sea  $\bar{\mathbb{D}}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ . Hallar todas las funciones  $f : \bar{\mathbb{D}}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{D}}_1$  que son holomorfas en el interior de  $\bar{\mathbb{D}}_2$  y satisfacen  $f(0) = 1$ .