

1. Sea $\Omega := [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Consideremos la familia de subconjuntos de Ω dado por

$$\Sigma := \{A \subset \Omega : A \text{ o } [0, 1] \setminus A \text{ es vacío, finito o contable}\}$$

y la función $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definido por

$$\mu(A) := \begin{cases} n, & A \text{ es un conjunto con } n \text{ elementos,} \\ \infty, & A \text{ es un conjunto infinito.} \end{cases}$$

Examina si (Ω, Σ, μ) define un espacio de medida.

2. Denote por $x = 0.x_1x_2\dots$ la expansión decimal (sin cola de nueves) de $x \in [0, 1]$. Sean $A_1 = \{x \in [0, 1] : \forall i \in \mathbb{N} (x_i \neq 7)\}$ y $A_2 = \{x \in [0, 1] : \forall i \in \mathbb{N} (x_i = 3 \rightarrow \exists j > i (x_j = 2))\}$. Muestre que A_1 y A_2 son subconjuntos Borel de $[0, 1]$ y halle la medida de Lebesgue $\lambda(A_i)$ (para $i = 1, 2$).
3. Sea μ la medida de Lebesgue con σ -álgebra \mathcal{M} en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Sea λ la medida de contar definida sobre \mathcal{M} . Mostrar que μ es absolutamente continuo con respecto a λ , es decir $\mu(X) = 0$ implica $\lambda(X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{M}$. Además mostrar que no existe $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $\mu(X) = \int_X h d\lambda$ para todo $X \in \mathcal{M}$. Es decir, no se satisface el Teorema de Radon-Nikodym. ¿Cual de sus requisitos no aplica?
4. Sean λ la medida de Lebesgue del \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ integrable. Para todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definamos $\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$
- a) Sean $\{K_j \subset \mathbb{R}^n : j \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos compactos de \mathbb{R}^n tal que $\cup_{j \in \mathbb{N}} K_j = \mathbb{R}^n$. Demuestra que $\lim_{m \rightarrow \infty} \chi_{A_m} f = f$ en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$ con respecto a la norma $\|\phi\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)| d\lambda(x)$, donde $A_m := \cup_{j=1}^m K_j$.
- b) Sea $\{G_j \subset \mathbb{R}^n : j \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Encuentra condiciones necesarias y suficientes para la familia $\{G_j : j \in \mathbb{N}\}$ que garantizan que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \chi_{G_j} \phi = \phi$ para todo $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ definida en a).
5. (Interpretación de la integral como un área bajo la curva.) Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida σ -finito, y considere el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$; sea $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A}_{X \times \mathbb{R}}, \xi)$ la medida producto. Demuestre que, si $f : X \rightarrow [0, \infty)$ es una función medible, entonces $F = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq \alpha \leq f(x)\}$ es un conjunto medible, y además $\xi(F) = \int f d\mu$.

6. Sea X espacio con medida σ -finita μ , sea $p \in [1, \infty)$.

- a) Mostrar que existe una función $w \in \mathcal{L}^p$ tal que $0 < w < 1$.
- b) Sea $g \in \mathcal{L}^\infty$. Mostrar que para cualquier $f \in \mathcal{L}^p$ tenemos $gf \in \mathcal{L}^p$ y que el mapeo lineal $M_g : \mathcal{L}^p \rightarrow \mathcal{L}^p$ dado por $f \mapsto gf$ es acotado.
- c) Sea $T : \mathcal{L}^p \rightarrow \mathcal{L}^p$ mapeo lineal acotado. Suponer que T y M_g conmutan para cualquier $g \in \mathcal{L}^\infty$, $T \circ M_g = M_g \circ T$. Mostrar que $T = M_h$ para algun $h \in \mathcal{L}^\infty$.
Sugerencia: Para $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^\infty$ mostrar

$$T(wf) = wT(f) = fT(w).$$

Si definimos $h := T(w)/w$ entonces $T(f) = hf$. Demuestra que h es esencialmente acotado por contradicción: Suponiendo que no lo es considerar conjuntos de medida positiva en donde $|h| > c$ para alguna constante c y evaluar T en la función característica de tales conjuntos. Finalmente, demuestra que $T(f) = hf$ para toda $f \in \mathcal{L}^p$.