

## Examen de Análisis Complejo, Enero 2024

1. ¿Es cierto que la transformación

$$(x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, -2axy) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad a \in \mathbb{R},$$

preserva ángulos orientados? Describe que ocurre para los distintos valores de  $a$ .

2. Para las trayectorias  $\gamma$  dadas por

$$\{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\} \text{ y } \{1 + it : t \in [0, \infty]\} \cup \{1 + it : t \in [+\infty, 0]\},$$

halla los valores correspondientes de

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}.$$

3. Determina la imagen de la trayectoria  $\{i + t(1 + i) : t \in \mathbb{R}\}$  bajo la transformación de Moebius

$$z \mapsto 1/z.$$

Prueba que vista en  $\mathbb{C}$ , la imagen es una cónica y discute si ella contiene al origen.

4. i) Discute bajo que condiciones una función racional  $R(z) = P(z)/Q(z)$  en  $\mathbb{C}$  posee función primitiva meromorfa.

ii) Aplica (i), para el caso de la función racional  $R(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , con  $ad - bc \neq 0$ .

5. Para la trayectoria  $\gamma = \{2e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ , calcula la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z + 1)(z - 3)^3}.$$

6. i) Calcula el número de ceros de los polinomios

$$P(z) = 4z^n - z^2 - z - 1, \quad n \geq 3,$$

en el conjunto  $D_1 \doteq \{z : |z| < 1\}$ .

ii) El método que propongas para  $n \geq 3$ ; ¿aplica también para  $n = 2, 1$ ?

7. Calcula la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

8. Determina los polos y singularidades esenciales de

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z - \pi/2}\right)}{(\cos z - 1)^2} e^{(1/z)}$$

en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , describiendo los tipos respectivos en cada caso.