

EXAMEN ANÁLISIS COMPLEJO

PCCM – ENERO 2015

1. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en $|z| < 1$, donde $z = x + iy$. Demostrar que la función $g(z) = f(z) - \overline{f(-\bar{z})}$ es analítica en $|z| < 1$.
2. Sea $g(z) = \frac{\sin(\pi/z)}{(z-1)^3}$. Determinar los puntos singulares aislados de g , sus tipos y los residuos: $\text{Res}(g(z), 1)$ y $\text{Res}(g(z), \infty)$.
3. Hallar el número de ceros del polinomio $p(z) = z^{10} + 10z^4 - 5$ en el anillo $1 < |z| < 2$.
4. Sea f una función entera tal que $f(z_0) = a$, $f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) = b$ y $f(z) \leq M|z - z_0|^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $a, b \in \mathbb{C}$ y $M \in (0, \infty)$. Determinar f .
5. Calcular las integrales $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 2} dx$ y $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos(\varphi)} d\varphi$.
6. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante, $K \subset U$ un compacto con un interior K° no vacío y $|f(z)| = c > 0$ para todo $z \in \partial K := K \setminus K^\circ$. Demostrar que f tiene un cero en K° .
7. Sean $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa que satisface $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hallar f .
8. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante, y $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de f que no es esencial. Demostrar que existe un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^t |f(z)|$ existe y es diferente a 0. Además, $t \in \mathbb{Z}$.
9. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa tal que $f(\frac{1}{z})$ es analítica en $z = 0$ y $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq 0$. Demostrar que existe $R > 0$ tal que $\oint_{\{|z|=R\}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$.