

1. Sean (X, \mathcal{M}) y (Y, \mathcal{N}) espacios medibles, $f : X \rightarrow Y$ una función medible, $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ una medida positiva. Definir la función $\nu : \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty]$ de la manera siguiente: $\nu(A) := \mu(f^{-1}(A))$ para todo $A \in \mathcal{N}$.

a) Mostrar que ν es una medida positiva.

b) Sea $g \in \mathcal{L}^1(Y, \nu, \mathbb{C})$. Mostrar que $g \circ f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$ y además

$$\int_X g \circ f \, d\mu = \int_Y g \, d\nu.$$

2. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, μ la medida de Lebesgue, suponga que $f \in \mathcal{L}^1(E, \mu, \mathbb{R})$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in E$. Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f|^{\frac{1}{n}} = \mu(E).$$

3. Sea $K := [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{C}$ y $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $f(z) = 1/z$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 0$. ¿Es cierto que $f \in \mathcal{L}^1(K, \mu, \mathbb{C})$? (μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{C} .)

4. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, μ la medida de Lebesgue, suponga que $f \in \mathcal{L}^2(E, \mu, \mathbb{R})$ calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \mu(\{x \in E : |f(x)| \geq n\}).$$

5. Consideramos \mathbb{R} con la medida de Lebesgue μ_1 . Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu_1, \mathbb{R})$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible.

a) Demostrar que eso implica que $(x, y) \mapsto f(x - y)$ es elemento de $\mathcal{L}^1(A \times A, \mu_2, \mathbb{R})$ o dar un contraejemplo. (μ_2 es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 .)

b) La misma pregunta con la condición adicional de que A es acotado.

6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto Lebesgue medible, μ la medida de Lebesgue. Suponga que $\mu(A \cap (a, b)) < (b - a)/2$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demuestre que $\mu(A) = 0$.