

Examen Básico de Analisis Real

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

UNAM-UMSNH

(14 Septiembre 2020)

Instrucciones: El examen consta de seis problemas cada uno vale 10 puntos y para aprobarlo necesitan por lo menos 40 puntos, admitiendo la posibilidad de contestar un solo inciso de alguna pregunta. El tiempo para resolver este examen es de **cuatro horas**, el cual se les proporcionara via correo electrónico a las 10:00 am y la hora límite de entrega es a las 14:00 hs, enviandolo escaneado al Dr. S. García Ferreira por medio de su correo electrónico (sgarcia@matmor.unam.mx). Cada respuesta deberá ser escrita de manera clara en una sola hoja por separado anotando su nombre en cada una. Adicionalmente indicar el numero de hoja y el numero total de hojas que se entregan (por ejemplo, 3/6 indica hoja 3 de 6 en total). Ya que el examen es virtual se les pide honestidad, no consular libros y ni a ninguna persona por ayuda (di "no" a la corrupción).

PROBLEMAS

1. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida. Consideremos el conjunto $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty\}$ y definimos la relación en \mathcal{F} dada por $A \sim B$ si $\mu(A \Delta B) = 0$. Resolver las siguientes dos cuestiones:

a) Probar que \sim es una relación de equivalencia en \mathcal{F} .

Para cada $A \in \mathcal{F}$ denotamos por $[A] = \{B \in \mathcal{F} : A \sim B\}$ la clase de equivalencia de A . Ahora definimos $d([A], [B]) = \mu(A \Delta B)$ para cada $A, B \in \mathcal{F}$.

b) Probar que d es una métrica completa en $\{[A] : A \in \mathcal{F}\}$.

Notación: Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida. Dada una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, el *supremo esencial* de f se define como

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{r \in \mathbb{R}^* : |f| \leq r \text{ casi en todas partes}\}.$$

2. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Pruebe que para cualquier función medible $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, se sigue que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_{\infty}.$$

Notación: En los problemas siguientes λ denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Suponga que si $\lambda(A) = 0$ entonces $f^{-1}(A)$ es Lebesgue medible, pruebe que si $E \subset \mathbb{R}$ es medible entonces $f^{-1}(E)$ es Lebesgue medible.

4 Determine los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{nx}{1+n^2x^3} d\lambda.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (1 - \frac{x}{n})^n d\lambda.$

5. Sea X un espacio métrico y μ una medida finita sobre la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$.

- a) Pruebe que su completación $\bar{\mu}$ es *regular*, i.e., para cualquier conjunto μ -medible $A \subseteq X$ se sigue que

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(A) &= \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ y } F \text{ es cerrado}\} \\ &= \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ y } U \text{ es abierto}\}.\end{aligned}$$

- b) Si además el espacio X es completamente metrizable, pruebe que $\bar{\mu}$ es *estrecha*, i.e., para cualquier conjunto μ -medible $A \subseteq X$ se sigue que

$$\bar{\mu}(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

Recordar que un conjunto $A \subseteq X$ es μ -medible si existen $B, C \in \mathcal{B}(X)$ y $N \subseteq C$ tales que $\mu(C) = 0$ y $A = B \cup N$. En tal caso $\bar{\mu}(A) = \mu(B)$.

6. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida finito (i. e., $\mu(X) < \infty$). Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible no negativa tal que el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f^n d\mu < \infty,$$

existe y es finito, probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f^n d\mu = \mu(\{x : f(x) = 1\}).$$