

EXAMEN BÁSICO DE ANÁLISIS REAL
JUNIO 2018

1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$, m la medida de Lebesgue. Dado $\epsilon > 0$, pruebe que existe $A \subset \mathbb{R}^n$ con $m(A) < \infty$ tal que f es acotado en A y $\int_{A^c} |f| < \epsilon$.
2. Sea $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ -finito y sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ una familia formada por conjuntos ajenos entre sí. Sea $E \in \mathcal{A}$ con $\lambda(E) > 0$ fijo. Pruebe que la familia $\mathcal{D}_E = \{D \in \mathcal{D} : \lambda(E \cap D) > 0\}$ es a lo sumo numerable.

3. Sea $A \subset [0, 2\pi]$ un conjunto m -Lebesgue medible. Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \cos nx \, dm = 0.$$

4. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, medible. Demuestre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int_{[0, \infty)} e^{-\epsilon t} f(t) \, dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

siempre que la integral en el lado izquierdo y el límite en el lado derecho exista.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ medible, no negativa, para m la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n sea $F(y) := m(f^{-1}(y))$, calcule $\int_{\mathbb{R}} F dm$.
6. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \lambda)$ tal que existe $k \geq 0$ de manera que para cada $E \in \mathcal{A}$ con $0 < \lambda(E) < +\infty$ se tiene que

$$\left| \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda \right| \leq k.$$

Demuestre que $|f| \leq k$, λ -casi-dondequiera.