

1. Examen

1. La función $\phi(z)$ es meromorfa en el dominio D y analítica en su frontera C . Demostrar las proposiciones siguientes:

a) Si $|\phi(z)| < 1$ sobre C , el número de raíces de la ecuación $\phi(z) = \alpha$ ($|\alpha| \geq 1$), pertenecientes al dominio D , es igual al número de polos de la función $\phi(z)$ en el dominio D .

b) Si $|\phi(z)| > 1$ sobre C , el número de raíces de la ecuación $\phi(z) = \beta$ ($|\beta| \leq 1$), pertenecientes al dominio D , es igual al número de ceros de la función $\phi(z)$ en el dominio D .

2. Sumar

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$$

y demostrar, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\phi}{n} = \frac{\phi}{2} \quad (-\pi < \phi < \pi).$$

3. Hallar

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2} \quad (1^p = 1; -1 < p < 3),$$

$$2) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a + \cos \phi} \quad (a > 1).$$

4. Hallar

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|z-a|=\rho} \phi(z) f(z) dz,$$

si $\phi(z)$ es analítica en $z = a$ y $f(z)$ en $z = a$ tiene polo del orden k .