

EXAMEN GENERAL DE ANALISIS REAL

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

UNAM-UMSNH

(Enero de 2019)

Nombre:

Instrucciones: El examen consta de seis problemas de los cuales deberán contestar completamente cuatro de ellos. El tiempo para resolver este examen es de **cuatro horas**. Cada respuesta deberá ser escrita de manera clara en una sola hoja por separado anotando su nombre en cada una. Adicionalmente indicar el número de hoja y el número total de hojas que se entregan (por ejemplo, 3/6 indica hoja 3 de 6 en total).

Problema 1. Consideremos la medida de Lebesgue λ en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Sea $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de $[0, 1]$. Suponga que $\sum \lambda(E_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que el conjunto de puntos que pertenecen a una infinidad de elementos de $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene medida cero.

Problema 2. Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida completo y f, g funciones real extendidas definidas en un conjunto medible A . Si f es medible y $f = g$ casi en todo A , pruebe que g es también medible.

Problema 3. Consideremos la medida de Lebesgue λ en el intervalo abierto $(0, 1)$.

(1) ¿Es cierto que $L^2(0, 1) \subset L^1(0, 1)$? ¿Por qué?

(2) ¿Es cierto que $L^1(0, 1) \subset L^2(0, 1)$? ¿Por qué?

Problema 4.

(1) ¿La integral de Riemann impropia $\int_{[0, \infty)} \frac{\sin x}{x}$ converge? ¿Por qué?

(2) ¿La integral de Lebesgue $\int_{[0, \infty)} \frac{\sin x}{x}$ converge? ¿Por qué?

Problema 5. Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Si $p_1 < p < p_2$, probar que para cada $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ existen $f_1 \in L^{p_1}(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $f_2 \in L^{p_2}(X, \mathcal{A}, \mu)$ tales que $f = f_1 + f_2$.

Problema 6. Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $\int |f|^p d\mu < \infty$ para algún $1 \leq p < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n = (f \wedge n) \vee -n$ el n -truncamiento de f . Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int |f - f_n|^p d\mu < \epsilon.$$