

1. Determina todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación diferencial $f + f' = 0$.
2. Considera $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, muestra que ella es la derivada de una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$, donde $[0, 1]$ es el segmento rectilíneo entre 0 y 1.
3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + r^2)^2} dx, \quad r > 0,$

b) $\oint_{\{|z-i|=2\}} \frac{1}{(z+2)^n (z-1-i)^m} dz, \quad n, m \in \mathbb{N}.$

4. Considera $D \subset \mathbb{C}$ abierto y convexo tal que $\mathbb{R} \cap D \neq \emptyset$ con $z_0 \in \mathbb{R} \cap D$ un punto **fijo**. Para $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ la serie de potencias de f alrededor de z_0 . Demuestra que $f(x) \in \mathbb{R}$ para **todo** $x \in \mathbb{R} \cap D$ si y solo si $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.
5. Sea dada la función $f(z) = \begin{cases} 3x(1-i) + (y^3 + 3iy) & \text{para } |\operatorname{Re} z| > 1, \\ x^2 + 2x + 2ixy + 2iy - y^2 & \text{para } |\operatorname{Re} z| < 1. \end{cases}$
Determinar y bosquejar el dominio donde f es diferenciable. ¿Dónde f es holomorfa?
6. Sea $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ un polinomio de grado n y $R > 0$ y tal que $p(z) \neq 0$ para $|z| \geq R$. Evaluar $\int_{|z|=R} \frac{z p'(z)}{p(z)} dz$.
7. Hallar todos los puntos singulares de la función

$$f(z) = \frac{ze^{1/\sin z}}{(2z - \pi) \sin z \cos 2z}$$

y determinar su tipo.