

1. Encuentre una rama del logaritmo tal que $f(z) = \log \frac{z-1}{z+1}$ sea holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
2. Encuentra todas las funciones enteras contractivas, es decir, todas las funciones $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tal que $|f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2|$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
3. Para cada una de las siguientes funciones calcule la integral a lo largo de la curva $|z| = 2022$ orientada en el sentido contrario de las manecillas del reloj:

a) $f(z) = \frac{1}{\sin(z)},$

b) $\frac{1}{e^{2z} - e^z}.$

4. Sea $P_n(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n!)} + \cdots.$

Demuestre que $P_n(z) \neq 0 \forall z \in B_{1,5}(0)$ para n suficientemente grande.

5. Sea $f \in \mathcal{O}(B_1(a))$, $\gamma_\varepsilon(t) := \left\{ a + \varepsilon e^{it}, t \in [0, \pi] \right\}$, y $a \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - a} dz = \pi i f(a).$$

Cuidado: El camino γ_ε no es cerrado.

6. ¿Son $B_1(0) \setminus \{0\}$ y $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ conformemente equivalentes? Mostrar tu respuesta. [*Pista:* Puede ser útil acordarse del siguiente Lemma: Sea D región, $a \in D$ y $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a\})$ inyectiva. Entonces a es polo de orden 1 o a es singularidad removible y la continuación de f a D es inyectiva.]