

# EXAMEN GENERAL, ANÁLISIS COMPLEJO: 15 de Febrero de 2021

1. Evaluar la integral

$$I = \int_{\gamma} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz$$

en donde  $\gamma$  es un cuadrado con vértices en  $1+i$ ,  $-1+i$ ,  $-1-i$ ,  $1-i$ .

2. ¿Existe una función holomorfa no nula en un conjunto abierto acotado  $D$  que tiene una infinidad de ceros?

¿Puede tener una infinidad de ceros en un conjunto abierto acotado  $D$  una función no nula que es holomorfa en la cerradura de  $D$ ?

3. Para cada  $z \in D = \{z : |z| < 1\}$ , sea

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}.$$

Pruebe que  $f(z)$  tiene a  $C = \{z : |z| = 1\}$  como su frontera natural.

4. Sea  $p_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k/k!$  y sea  $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ . Pruebe que si  $n$  es suficientemente grande, entonces  $p_n(z)$  no se anula en  $D_R$ .

5. Sea  $f(z)$  una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  tal que

$$f(z) = f(-z), \quad z \in \mathbb{C},$$

y  $a \neq 0$  es el polo simple con residuo 1. Demuestra que  $-a$  también es el polo simple de  $f$  y encuentra el residuo de  $f$  en  $-a$ .

6. Sea

$$\varphi(t) := \ln t - \ln(t-1), \quad t \notin (-\infty, 1),$$

y para la función  $\ln$  se escoge la rama tal que  $\arg \ln z \in (-\pi, \pi)$ . Demuestre que  $\varphi(t)$  admite una extensión a una función holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ .

7. Sea  $G$  un conjunto abierto y conexo y  $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$  analíticas para todo  $n \geq 1$ . Supongamos que  $\{f_n\}$  converge uniformemente a la función  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Probar que  $f$  es analítica en  $G$ .