

EXAMEN BÁSICO DE ANÁLISIS REAL

ENERO 2025

- 1).- Considere (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y que $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$ en medida. Pruebe
- $f_n + g_n \rightarrow f + g$ en medida.
 - Suponga que existe $M > 0$ tal que $|f_n| \leq M$, $|g_n| \leq M$ μ -c.t.p. entonces $f_n g_n \rightarrow fg$ en medida.
- 2).- Sea $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue medible, $\lambda(E) > 0$, λ la medida de Lebesgue. Pruebe o de un contraejemplo: i) E contiene un subconjunto cerrado de medida positiva. ii) E contiene un abierto de medida positiva.

1. Definición: Un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) se llama *semifinito* si para cada $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{A}$ tal que $F \subseteq E$ y $0 < \mu(F) < \infty$.

- 3).- Dado un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) , definimos $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ de la siguiente manera

$$\lambda(A) := \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subseteq A \text{ y } \mu(B) < \infty\}$$

para cada $A \in \mathcal{A}$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

- λ es una medida semifinita.
 - Si μ es semifinita, entonces $\mu = \lambda$.
- 4).- Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $p, q \geq 1$ tal que $\frac{pq}{p+q} \geq 1$. Si $f \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $g \in L_q(X, \mathcal{A}, \mu)$, pruebe que $fg \in L_{pq(p+q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ y

$$\|fg\|_{pq(p+q)} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Sugerencia: Considere $r = \frac{p+q}{pq}$ y justifique la igualdad $\frac{1}{rp} + \frac{1}{rq} = 1$.

- 5).- Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{x^2}{n}}\right) x^{-1/2} dx.$$

- 6).- Sea $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ un homomorfismo de grupo Lebesgue medible. Demuestre que f es continuo.