

EXAMEN GENERAL: ANÁLISIS COMPLEJO, ENERO 2025.

1. Considera la transformación

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_i^z z(z-1)(z+1)dz. \end{aligned}$$

Prueba que $F(z)$ preserva ángulos orientados en $\mathbb{C} \setminus \{\text{tres puntos}\}$. Prueba que $F(z)$ no preserva ángulos orientados en dichos tres puntos.

2. Considera la función

$$\begin{aligned} H : \Omega \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_0^z \left(\frac{i}{z} + \frac{1}{(z-1)^9} \right) dz. \end{aligned}$$

- a) Determina un abierto maximal Ω donde H sea continua.
b) Muestra que existen puntos frontera z_1 de Ω en \mathbb{C} , donde la extensión de H a z_1 es necesariamente discontinua.
3. Sea $f(z)$ una función entera que no tiene ceros en las circunferencias $\{|z| = n\}$ de radio n centradas en el origen, para cada entero positivo n . Supon además que

$$\int_{|z|=n} \frac{1}{f(z)} dz \neq \int_{|z|=n+1} \frac{1}{f(z)} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- a) Discute si los monomios $f(z) = z^k$, $k = 2, 3, \dots$, satisfacen lo anterior.
b) Demuestra que $f(z)$ no puede ser un polinomio.
4. Sea f una función entera y $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, conexo y acotado. Muestra que si la norma $|f|$ es constante en la frontera ∂U , entonces f es constante o bien tiene un cero en U .
5. Sea $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ el disco unitario.
a) Encuentra todos los automorfismos de \mathbb{D} que fijan los puntos ± 1 en la frontera de $\partial \mathbb{D} = \{|z| = 1\}$.
b) Sea ω un círculo contenido en $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Muestra que existe un automorfismo f de \mathbb{D} tal que $f(\omega)$ es un círculo centrado en el origen.
6. Sean m y n enteros positivos. Escribe

$$I = \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta$$

como una integral de una función racional R ,

$$\int_{z=e^{i\theta}} R(z) dz, \quad \theta \in [0, 2\pi];$$

para mostrar que I se anula a menos que $m = n$, en cuyo caso I es igual a π .