

Examen Básico de Analisis Real

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

UNAM-UMSNH

(14 Septiembre 2020)

Instrucciones: El examen consta de seis problemas cada uno vale 10 puntos y para aprobarlo necesitan por lo menos 40 puntos, admitiendo la posibilidad de contestar un solo inciso de alguna pregunta. El tiempo para resolver este examen es de **cuatro horas** de 9:00 hs y a 13:00 hs. Cada respuesta deberá ser escrita de manera clara en una sola hoja por separado anotando su nombre en cada una. Adicionalmente indicar el número de hoja y el número total de hojas que se entregan (por ejemplo, 3/6 indica hoja 3 de 6 en total).

PROBLEMAS

1. Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, μ^* la medida exterior inducida por μ y \mathcal{M}_{μ^*} los conjuntos medibles.

(a). Si $n \in \mathbb{N}$ y $\{A_k : k \leq n\} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ son disjuntos entre si, probar que

$$\mu^*(D \cap (\bigcup_{k=1}^n A_k)) = \sum_{k=1}^n \mu^*(D \cap A_k)$$

para toda $D \subseteq X$.

(b). Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ son disjuntos entre si, probar que

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} (D \cap A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(D \cap A_n)$$

para toda $D \subseteq X$.

2. Considere el conjunto de los números naturales \mathbb{N} ; para una progresión aritmética $A = \{an + b : n \in \mathbb{N}\} = a\mathbb{N} + b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ ponga $m(A) = m(a\mathbb{N} + b) = a^{-1}$. Sea \mathcal{A} el conjunto de todas las progresiones aritméticas y

$$\mathcal{B} = \left\{ B \subseteq \mathbb{N} : \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos tales que } B = \bigcup_{i=1}^n A_i \right\}$$

(los subconjuntos de \mathbb{N} que se pueden escribir como unión disjunta de una cantidad finita de elementos en \mathcal{A}). Luego para $B \in \mathcal{B}$, dado que $B = \bigcup_{i=1}^k A_i$ (unión disjunta), definimos:

$$m(B) = \sum_{i=1}^k m(A_i).$$

Finalmente, defina $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ donde

$$\mu(C) = \inf\{m(B) : B \in \mathcal{B} \text{ y } C \subseteq B \cup F, F \subseteq \mathbb{N} \text{ es finito}\}.$$

Demuestre que μ es una medida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

3.

- (a). Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Probar que existe una medida de Borel finita $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$K = \text{supp}(\mu) := \mathbb{R} \setminus \bigcup \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abierto, } \mu(A) = 0\}.$$

- (b). Sean $q \in (0, 1)$ y $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado tal que $qX = X$. Probar que existe una medida de Borel σ -finita $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\nu(qB) = \nu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y

$$X = \text{supp}(\nu) := \mathbb{R} \setminus \bigcup \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abierto, } \nu(A) = 0\}.$$

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & \text{si } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ una enumeración de los números racionales, y sea

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x - r_n)}{2^n}.$$

- (a). Demuestre que g es integrable (respecto de la medida de Lebesgue; en particular, $g < \infty$ λ -casi donde sea).
 (b). Demuestre que g es discontinua en todo punto, y no acotada en todo intervalo. Más aún, g sigue teniendo estas dos propiedades después de cualquier modificación en un conjunto nulo.
 (c). Demuestre que $g^2 < \infty$ casi donde sea, pero g^2 no es integrable en ningún intervalo.

5.

- (a). Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, donde λ denota la medida de Lebesgue. Probar que $L^p(\mathbb{R}, \lambda) \not\subseteq L^q(\mathbb{R}, \lambda)$ y $L^p(\mathbb{R}, \lambda) \not\supseteq L^q(\mathbb{R}, \lambda)$ para todo $p, q \in [1, \infty]$ tal que $p \neq q$.

- (b). Probar que $\bigcap_{p \in [1, \infty]} L^p(\mathbb{R}, \lambda) = L^1(\mathbb{R}, \lambda) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$

- (c). ¿Qué cambia en (b) si λ es una medida de Borel finita?

- (d). ¿Qué cambia en (b) si λ es una medida de Borel discreta de tal forma que existe un $\epsilon > 0$ tal que $\lambda([x - \epsilon, x + \epsilon] \setminus \{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

6. Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, $0 < p < 1$ y $f, g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ dos funciones no negativas. Probar que

$$\left(\int (f^p + g^p)^{\frac{1}{p}} d\mu \right)^p \leq \left(\int f d\mu \right)^p + \left(\int g d\mu \right)^p.$$