

**Examen Básico de Analisis Real**  
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas  
UNAM-UMSNH  
(23 Junio de 2023)

**Instrucciones:** El examen consta de seis problemas cada uno vale 10 puntos y para aprobarlo necesitan por lo menos 40 puntos, admitiendo la posibilidad de contestar un solo inciso de alguna pregunta. El tiempo para resolver este examen es de **cuatro horas** de 10:00 hs y a 14:00 hs. Cada respuesta deberá ser escrita de manera clara en una sola hoja por separado anotando su nombre en cada una. Adicionalmente indicar el número de hoja y el número total de hojas que se entregan (por ejemplo, 3/6 indica hoja 3 de 6 en total).

**PROBLEMAS**

1. Probar que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto abierto denso  $U$  de  $\mathbb{R}$  tal que su medida de Lebesgue  $\lambda(U) < \varepsilon$ .

2. Sea  $\lambda$  la medida de Lebesgue y  $E \subseteq \mathbb{R}$  Lebesgue medible con  $\lambda(E) > 0$ . Mostraremos que  $E - E$  contiene una vecindad de 0. La regularidad de la medida implica la existencia de un compacto  $K$  y un abierto  $U$  tal que  $K \subseteq E \subseteq U$  y tal que  $\lambda(U) < 2\lambda(K)$ .

- a) Mostrar que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $K + (-\epsilon, \epsilon) \subseteq U$ . *Sugerencia:* Usar la continuidad del mapeo de adición  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- b) Mostrar que para cada  $x \in \mathbb{R}$  con  $|x| < \epsilon$  tenemos  $K \cap (K + x) \neq \emptyset$ .
- c) Mostrar que  $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq E - E$ .

3. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considera el conjunto de conjuntos unitarios

$$I_n := \{\{2\}, \{4\}, \dots, \{2n\}\}.$$

- 1. Determina la  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma_n$  generada por  $I_n$  sobre  $\mathbb{N}$ , es decir, la  $\sigma$ -álgebra más pequeña sobre  $\mathbb{N}$  que contiene los conjuntos de  $I_n$ .
- 2. ¿Es  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$  una  $\sigma$ -álgebra?
- 3. Sea  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$  y  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f(n) = n$ . ¿Es  $f$  medible con respecto a los espacios medibles  $(\mathbb{N}, \Sigma_n)$  y  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ?

4. Consideramos  $\mathbb{R}$  con la medida de Lebesgue  $\lambda$ . Denotamos por  $F$  el espacio de funciones  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dado  $r > 0$  sea  $S_r: F \rightarrow F$  el operador definido por,

$$(S_r(f))(x) := f(rx).$$

Sea  $f$  integrable. Mostrar que  $S_r(f)$  es integrable. Además mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} S_r(f) = \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}} f.$$

Nota: No son validos argumentos sobre “cambios de variable” sin prueba.

*Sugerencia:* Considerar una sucesión de funciones simples integrables convergiendo a  $f$  (en cual(es) sentidos?).

**5.** Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida y  $1 \leq p < +\infty$ . Probar las siguientes afirmaciones:

- a) Si  $f, g \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ , entonces la función  $\max\{f, g\} \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ .
- b) Si  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$  y  $f_n \rightarrow f$  y  $g_n \rightarrow g$  ambas en  $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ , entonces  $\max\{f_n, g_n\} \rightarrow \max\{f, g\}$  en  $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

Recordar que  $L_p(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y } \int |f|^p d\mu < +\infty\}$ .

**6.** Sean  $\lambda$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  medible,  $p \in [1, \infty)$  and  $X \subset \mathbb{R}$  un conjunto medible. Demuestra que  $f \in L_p(\mathbb{R}, \lambda)$  si y solo si

$$\liminf_{n \in \mathbb{N}} \int_{X \cap [-n, n]} |f(x)|^p d\lambda(x) < \infty.$$