

## EXAMEN BÁSICO DE ANÁLISIS REAL ENERO 2016

1. Sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$ . Si  $A \subset [-1, 1]$  tiene medida de Lebesgue cero, pruebe que  $g(A)$  tiene medida de Lebesgue cero.
2. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = \sin(x^2)$ .
  - a) ¿Es cierto que  $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ ?<sup>1</sup>
  - b) ¿Es cierto que  $\int_0^\infty f(x)dx$  existe en el sentido de la integral de Riemann impropia?
3. a) Pruebe que  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

- es Borel medible, pero no existe una función continua  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = g$  ( $\lambda$ -c.d.).
- b) Halle  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  Borel medible y acotada tal que  $\|f - g\|_1 > 0$  para toda  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua.
4. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere la función  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{|x| + 1}.$$

- ¿Converge  $\langle f_n: n \in \mathbb{N} \rangle$  en  $\mathcal{L}_2(\lambda)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ ?
5. Sea  $\lambda$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ , calcule:
  - a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} d\lambda$ ,    b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty n \sin\left(\frac{x}{n}\right) [x(1 + x^2)]^{-1} d\lambda$ .
6. Sea  $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$  medible. Supóngase que:  $\lambda(E^y) \geq \frac{1}{2}$  para toda  $y \in [0, 1]$ . Sea  $F = \{x \in [0, 1]: \lambda(E_x) \geq \frac{1}{4}\}$ . Pruebe:
  - a)  $F$  es Lebesgue medible.
  - b)  $\lambda(F) \geq \frac{1}{3}$ .

---

<sup>1</sup>Aquí  $\lambda$  representa la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .