

# Examen general de análisis complejo.

16 junio 2021

1. Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto y  $\partial U$  es un contorno simple cerrado. Encuentre

$$\int_{\partial U} \frac{\cos z \, dz}{z}.$$

2. Desarrollar en la serie de Laurent

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad (0 < |a| < |b|) \quad \text{para} \quad 0 < |z| < |a| \quad \text{y} \quad |a| < |z| < |b|.$$

3. Sea  $f(z)$  holomorfa en  $\mathbb{C}$  y  $f(z) \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$ . Demostrar que  $f(z)$  es un polinomio.
4. Encontrar una transformación conforme del dominio  $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$  sobre el semiplano superior.
5. Sea  $f$  una función holomorfa en  $B_2(0)$ , el disco de radio 2 con centro en el origen. Definir una curva  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mediante  $\gamma(t) = f(e^{it})$ . Aplicar la fórmula integral de Cauchy a  $f'$  para demostrar que  $2\pi|f'(0)| \leq \ell(\gamma)$  (donde  $\ell(\gamma)$  denota la longitud de  $\gamma$ ).
6. Encontrar la integral

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$