

Examen de Análisis Real

1).- Sea $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ determine si se cumple:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dm = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dm.$$

2).- Sea $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{|x|^{5/2}} \right) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Muestre que la función $|f'|$ no es acotada, ni Riemann-integrable pero sí es Lebesgue-integrable.

3).- Sea $E \subset \mathbb{R}$, m la medida de Lebesgue, suponga que $m(E) < \infty$ y si $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ converge casi en todo punto de E a f , pruebe que $\{f_n\}$ converge en medida a f .

4).- Sea $f \in L^1([a, b] \times [c, d], m)$, $f \geq 0$ suponga $\|f\|_1 > b - a$, pruebe que existe $x \in [a, b]$ tal que $\int_{[c, d]} f(x, y) dy > 1$.

5).- Sea (X, \mathcal{A}, μ) espacio de medida, pruebe que μ es σ -finita si y sólo si existe una función integrable estrictamente positiva.

6).- i).- Sea X un conjunto arbitrario, para $E \subseteq \mathcal{P}(X)$ fijo, denote por $\mathcal{A}(E)$ la σ -álgebra generada por E . Pruebe que para todo $A \in \mathcal{A}(E)$, existe una subfamilia a lo más numerable $E_0 \subseteq E$ tal que $A \in \mathcal{A}(E_0)$.

ii).- Si X es no numerable y $S := \{A \subseteq X : A \text{ ó } X \setminus A \text{ es a lo más numerable}\}$. Pruebe que $D := \{(x, x) : x \in X\}$, la diagonal de $X \times X$, no pertenece a $\mathcal{A}(S \times S)$, donde $S \times S := \{A \times B : A, B \in S\}$.