

## EXAMEN GENERAL DE ANÁLISIS COMPLEJO.

24 DE ENERO DE 2020.

Resuelve por lo menos cuatro de los problemas que se enlistan a continuación.

1. Determina el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n$$

para  $k \in \mathbb{N}$  (da una respuesta en términos de  $k$ ).

2. Mostrar que la función  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  es un biholomorfismo entre  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$  y  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Use esto para mostrar que  $\Delta$  es biholomorfo al plano complejo.

3. Considera  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  una función meromorfa con un polo en 0. Para todo rayo  $\gamma$  que inicia en  $e^{i\theta}$  y finaliza en 0, muestra que

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \infty.$$

4. Encuentre todos los residuos de la función:

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

Determine si  $f$  tiene una primitiva  $F$  en un algún abierto de  $\mathbb{C}$ .

5. Calcule  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+2} dx$  y  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(z)} dz$ .

6. Demuestra que todos los ceros de  $p(z) = z^8 + 3z^3 + 7z + 5$  se encuentran en el anillo  $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{3}{2}\}$ .