

# Examen Básico de Ecuaciones Diferenciales

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

27 de junio 2022

**Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.**

1. Describir el retrato fase del siguiente sistema al variar  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = x - ay \\ \dot{y} = ax + 2y. \end{cases}$$

2. Determinar si los siguientes sistemas admiten órbitas periódicas.

$$a) \begin{cases} \dot{x} = -x + 4y \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} = -z + z(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

3. Sea  $A(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(4t) - 1 & 2\sin(4t) + 2 \\ 2\sin(4t) - 2 & 2\cos(4t) - 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Verificar que  $\begin{pmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$  es solución del sistema

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{1}$$

- b) Determinar los multiplicadores y exponentes característicos del sistema (1).

4. Sea dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  cuyos valores propios son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ .

- a) Hallar la determinante  $\det(e^A)$  sin calcular la matrix  $e^A$ .

b) Sea  $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$  y  $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Determinar la solución del problema de Cauchy  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(t) \\ x(0) = x^0. \end{cases}$

5. Sean  $f$  y  $f'_y$  continuas en  $\mathbb{R}^2$ . Determinar los valores  $n$  para los cuales la ecuación  $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y)$  puede tener entre todas sus soluciones las funciones  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x + x^5$ .

6. Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Dado el sistema  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x(1 + x^4) - ay. \end{cases}$  Determinar los valores de  $a$  para los cuales la solución trivial de este sistema es a) asintóticamente estable, b) estable pero no asintóticamente estable, c) inestable.