

Ecuaciones Diferenciales Parciales

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General, 13 de enero 2025

Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.

1. Resolver

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = x^2, \quad 0 < t, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

2. Demostrar que

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & x > \xi, \quad y > \eta, \\ 0 & \text{en los demás puntos,} \end{cases}$$

satisface

$$u_{xy} = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta).$$

3. Considere el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \\ u_r(1, \theta) = a + \cos \theta. \end{cases}$$

¿Para qué valores de a existe la solución? Construir la.

4. Demostrar que

$$u = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds \right)$$

es la solución del problema

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$
$$u|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

5. Encontrar la solución del problema de Cauchy

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u|_{t=0} = \exp(-x^2),$$

y determinar el intervalo de su existencia.

6. Encontrar todas las soluciones del problema de Cauchy

$$u_x^2 + u_y^2 = u^2, \quad u(\cos s, \sin s) = 1, \quad 0 \leq s < 2\pi.$$