

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General, 12 de junio 2017

Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.

1. Encontrar las tangentes a las separatrices del punto de equilibrio repelente x_0 de la ecuación de Newton

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dx}U(x), \quad U'(x_0) = 0, \quad U''(x_0) < 0,$$

en el plano fase (x, \dot{x}) .

2. Sean $\phi_{1,2}(t, x, y)$ dos primeras integrales del sistema

$$\dot{x} = f_1(t, x, y), \quad \dot{y} = f_2(t, x, y).$$

Supongamos que las superficies $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = 1$ en \mathbb{R}^3 tienen una sólo línea en común. Demostrar que esta línea es una curva integral del sistema.

3. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1(1 - x_1)(4/3 + x_1).\end{aligned}$$

- a) Determine si este sistema es conservativo. Puede utilizar $V(x_1) = \frac{2}{3}x_1^2 - \frac{1}{9}x_1^3 - \frac{1}{4}x_1^4$ como potencial.
b) Bosqueje el retrato fase del sistema dado.

4. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -x - (||x||^2 - 1)^2 v\end{aligned}$$

en un conjunto abierto G del espacio fase $\{(x, v) | x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n\}$. Determine que este sistema posee una solución periódica no trivial.

5. Establezca y justifique si es estable la solución del siguiente problema:

$$3(t-1)\dot{x} = x, \quad x(2) = 0.$$

6. Demuestre que si $q(x) > 0$ entonces para cada solución de la ecuación $y'' + q(x)y = 0$ la función $y'(x)/y(x)$ decrece sobre cualquier intervalo donde $y(x) \neq 0$.
Sugerencia: Usar $u(x) := y'(x)/y(x)$.