

Examen Básico de Ecuaciones Diferenciales

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

14 de septiembre 2020

Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.

1. Sea dada la ecuación diferencial $\dot{y}(t) = \cos(y(t)) + y^2(t) - y^3(t)$ con la condición inicial $y(0) = 0$. Verificar y justificar que este problema del valor inicial tiene una solución $y(t)$ definida en $[0, +\infty)$ y es acotada. Demuestre que $y(t)$, para $t \rightarrow \infty$ tiende a x_0 . Aquí x_0 es el menor valor positivo tal que $f(x_0) = 0$ con $f(x) = \cos x + x^2 - x^3$.
2. Sea dada la ecuación $y' = 2x + \alpha y^2$ con $y(0) = \alpha - 1$. Hallar $\left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$.
3. Hallar los valores λ y la funciones y no nulas del problema del valor de frontera siguiente:

$$x^2 y'' - xy' = -\lambda y, \quad y(1) = 0, \quad y(\ell) = 0, \quad \ell > 1.$$

4. Emplee una función de Lyapunov para determinar la estabilidad del origen de coordenadas como punto de equilibrio del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x' &= -x - \frac{x^3}{3} - x \sin(y) \\ y' &= -y - \frac{y^3}{3}. \end{aligned}$$

5. Muestre que el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + 5x^2 - 2xy + 3y^2 \\ y' &= -2x - 2y + 7x^2 - 10xy + y^2 \end{aligned}$$

es un sistema Hamiltoniano.

6. Considere el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Determine los conjuntos omega-límite y/o alfa-límite de este sistema.