

Examen General, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, 17 enero 2022.

1. Considera la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1)(x+1)^2.$$

i. Determina si posee puntos atractores (pozos), repulsores (fuentes) o indiferentes, para sus soluciones.

ii. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, supón que

$$x(t) : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

denota a la solución con condición inicial $x(0) = x_0$ y dominio máximo (a, b) , donde a, b pueden ser $\mp\infty$. Estima los límites

$$\lim_{t \rightarrow a} x(t) \quad , \quad \lim_{t \rightarrow b} x(t), \quad \text{para } t \in (a, b).$$

2 Encuentra todos los valores $\lambda > 4$ tales que el problema de frontera

$$x^2 y'' - 3xy' = -\lambda y, \quad y(1) = y(e) = 0$$

admite una solución no trivial.

3 Usando la ley de la conservación de energía encuentra la trayectoria fase de la solución de la ecuación de Newton

$$\ddot{x} = -\frac{3x^2}{2}$$

con los datos iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -1$.

Traza la trayectoria e indica la dirección de su paso o recorrido.

4 Sean $f(x, y)$ y $f_y(x, y)$ continuas en \mathbb{R}^2 . Determina el valor minimal del orden n de la ecuación

$$y^{(n)}(x) = f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}$$

para el cual esta ecuación puede tener dos soluciones $y_1(x) = x^2$ y $y_2(x) = x^2 - x^4$.

5. Analiza la estabilidad de la solución trivial $(x, y) = (0, 0)$, del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = ay + x^3 + a^2x \end{cases}.$$

6. Considera la familia de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = y^\alpha, \quad y \geq 0, \quad \text{y el parámetro } \alpha > 0.$$

Discute para que valores de α , la ecuación respectiva posee existencia y unicidad de soluciones para todas las condiciones iniciales $y_0 \geq 0$.