

Examen General de Ecuaciones Diferenciales

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

14 de enero 2020

Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.

1. Demostrar que el problema de Cauchy

$$\dot{x} = 3x + 44 \cos x, \quad x(0) = 33,$$

tiene solución $x(t)$ definida para todo t .

2. Analice la estabilidad de la solución trivial del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ay - x^3 - a^2x\end{aligned}$$

para $a \in \mathbb{R}$.

3. Sea $x(t, \mu)$ la solución de la siguiente ecuación con la condición inicial:

$$\dot{x} = x^2 + \mu tx^3, \quad x(0) = 1 + \mu.$$

Hallar $\left. \frac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.

4. Sea $A(t) = \begin{pmatrix} \alpha - \alpha \cos(t) & -\alpha \sin(t) - \frac{1}{2} \\ -\alpha \sin(t) + \frac{1}{2} & \alpha + \alpha \cos(t) \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Verifique que $\begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix}$ es una solución del sistema

$$\dot{x} = A(t)x.$$

b) Determinar los multiplicadores y exponentes característicos de este sistema.

c) Determinar si el sistema dado tiene dos soluciones periódicas linealmente independientes.

5. Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - x - \frac{4xy}{1+x^2}, \\ \dot{y} &= bx\left(1 - \frac{y}{1+x^2}\right),\end{aligned}$$

con $a, b > 0$. Encuentre las condiciones para a y b para las cuales el sistema presenta una órbita cerrada en el cuadrante positivo $x, y > 0$.

6. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - x - y)x, \\ \dot{y} &= (1 + \alpha x - y)y.\end{aligned}$$

modela las interacciones cooperativas entre un par de especies. El parámetro α mide qué tanto la cooperación afecta a la especie y .

Encuentre un intervalo de valores de α tal que las trayectorias de xy pasen de un crecimiento incontrolado a un equilibrio estable para ambas especies, y determine el valor para α en el que se da este cambio cualitativo de comportamiento.