

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMATICAS

Examen General, 15 de enero 2016

**Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.**

1. Pruebe que el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + 2y^2 - 1)$$

tiene una solución periódica.

2. Considere la ecuación diferencial  $\ddot{x} = -x + x^3$ .

a) Encuentre los puntos críticos y dibuja el retrato de fase del sistema correspondiente.

b) Encuentre la primera integral (energía) de este sistema.

c) Demuestre que el sistema tiene soluciones periódicas alrededor del origen.

3. Encuentre  $\left. \frac{\partial \theta}{\partial a} \right|_{a=0}$  si  $\theta$  es la solución del problema  $\ddot{\theta} = a - \sin \theta$ ,  $\theta = \dot{\theta} = 0$  para  $t = 0$ .

4. Demostrar que la solución de la ecuación  $\ddot{x} = \sin(x)$  está definida en todo el eje real.

5. Sean  $p$  y  $q$  funciones continuas periódicas de periodo  $\omega$ . Considere el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -q(t)x - p(t)y. \tag{1}$$

Sean  $\rho_1$  y  $\rho_2$  los multiplicadores característicos de este sistema. Si  $\rho_1 = \rho_2$ : a) Determinar el sistema fundamental de este sistema. b) Determinar los exponentes característicos de (1) mediante  $p$  y/o  $q$ . c) Analizar a) y b) para  $\rho_1 \neq \rho_2$ .

6. Determinar si los siguientes sistemas tienen trayectorias cerradas

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(xy + \cos^2(x)), \quad \dot{y} = 2(1 + x^2 - e^{xy}), \tag{2}$$

$$\dot{x} = 2xy - 2y^4, \quad \dot{y} = x + y + y^3. \tag{3}$$

7. Analizar la estabilidad en el sentido de Lyapunov de los siguiente sistemas:

$$\dot{x} = -y + xy - x^3 - \frac{1}{2}xy^2, \quad \dot{y} = -3y + xy + x^2y - \frac{1}{2}xy^2, \tag{4}$$

$$\dot{x} = x^2 + 2y^5, \quad \dot{y} = xy^2. \tag{5}$$