

Examen Básico de Ecuaciones Diferenciales

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

17 de junio 2024

Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.

1. Sea dado la ecuación diferencial $y^{(n)} = f(x, y)$, donde f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuos en todo el plano xOy . Para cuáles números naturales n la ecuación dada tiene entre sus soluciones a las funciones $y_1 = x$ y la función $y_2 = x + x^4$?

2. Sea dado el problema del valor inicial

$$\dot{x} = -\sin x, \quad x(0) = 1.$$

Justificar que este problema tiene una única solución global.

3. Sea dado el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + y + x^2, \\ \dot{y} &= x + ay + y^2.\end{aligned}$$

Analizar para cuáles valores del parámetro a la solución trivial de este sistema es asintóticamente estable.

4. Hallar la solución de la ecuación $y'' + y' = 1$ con condiciones de contorno $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$.

5. Sea dado el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + 2y, \\ \dot{y} &= -2xy.\end{aligned}$$

Determinar si el sistema dado es hamiltoniano, y determinar la curva que satisfacen las soluciones de este sistema.

6. Sea dado el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \frac{x(x^2 + y^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \dot{y} &= x - \frac{y(x^2 + y^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

En caso de que existan, determinar todos los ciclos límites de este sistema.