

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General, 25 de junio 2018

Redactar con claridad, enumerar las hojas e incluir todos los argumentos, aunque sean parciales.

1. Encontrar las tangentes a las separatrices del punto de equilibrio repelente x_0 de la ecuación de Newton

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dx}U(x), \quad U'(x_0) = 0, \quad U''(x_0) < 0,$$

en el plano fase (x, \dot{x}) .

2. Sean y_1 y y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

con p y q continuas. Supongamos que y_1 tiene dos ceros consecutivos en los puntos a y b . Demostrar que y_2 tiene un solo cero en el intervalo (a, b) .

3. Demostrar que cualquier solución de la ecuación

$$\dot{x} = 1/(2 + t^4 + \cos x)$$

es acotada para todo t .

4. Sea $H : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ continua, diferenciable y sea dado el sistema hamiltoniano $\dot{u} = J\nabla H(u)$, donde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Asuma que u_0 es un máximo o mínimo de H . Responda y justifique las siguientes preguntas:

- a) Tiene el sistema dado en cada vecindad U de u_0 trayectorias cerradas?
b) Existe una vecindad U_1 , tal que todas las trayectorias en $U_1 \setminus \{u_0\}$ son cerradas?

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 \\ \cos t \end{pmatrix}$.

- a) Muestre que $\dot{u} = Au + f(t)$ tiene una única solución periódica.
b) Determine el período de esta solución y una estimación para $\|u(t)\|_{\mathbb{R}^n}$.

6. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} x' &= y - 2 \cos x \sin x, \\ y' &= -y - \cos x \sin x. \end{aligned}$$

Analice la estabilidad de este sistema en el origen.

7. Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= -y + x^2. \end{aligned}$$

Encuentre las variedades estables e inestables en el origen y su respectivo espacio tangente. Bosqueje el retrato fase correspondiente.