

Examen de Inferencia Estadística (enero de 2025)

Para aprobar el examen se debe responder cuatro de los seis problemas siguientes.

1. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra de una distribución Rayleigh con función de densidad

$$(1) \quad f(x) = \frac{2x}{\theta} \exp \left\{ -\frac{x^2}{\theta} \right\} \mathbf{I}_0^\infty(x),$$

en donde $\theta > 0$. (a) Verifique que $f(x)$ es una función de densidad. (b) Determine un estimador $\hat{\theta}$ por el método de los momentos.

2. Sea $X \sim \text{Exp}(\theta)$, esto es, X es una variable con función de densidad $f(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbf{I}_0^\infty(x)$ en donde $\theta > 0$. (a) Calcule la información de Fisher de una muestra X_1, \dots, X_n de la población X . (b) Determine la cota inferior de Cramér y Rao para la varianza de un estimador insesgado de θ . (c) Determine el estimador $\hat{\theta}$ de máxima verosimilitud para θ y decida si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de varianza mínima.

3. Sea X_1, \dots, X_n una muestra de la población X con distribución Rayleigh y con función de densidad dada en la ecuación (1). Sea $U = X_1^2 + \dots + X_n^2$. Pruebe que U es un estadístico suficiente para θ .

4. Sea X_1, \dots, X_n una muestra de la población $X \sim \text{N}(0, \theta)$, con $\theta > 0$, y sea $\hat{\theta}$ el estimador máximo verosímil para θ . Determine la distribución asintótica de $\hat{\theta}$.

5. Sea X_1, \dots, X_n una muestra de la población $\text{Uni}(-\theta, \theta)$ en donde $\theta > 0$. Sea

$$U = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|X_i|}{\theta}.$$

- (a) Pruebe que U tiene como función de distribución a $F(u) = u^n \mathbf{I}_0^1(u)$. (b) Sea $\alpha \in (0, 1)$. (c) Use el hecho de que U es un pivote para construir un intervalo al 100(1 - α)% de confianza para θ .

6. Sea X_1, \dots, X_n una muestra de la población $X \sim \text{Exp}(\theta)$ en donde $\theta > 0$. Sea $\alpha \in (0, 1)$. (a) Determine la región de rechazo óptima con probabilidad α para el error tipo I para las hipótesis

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

en donde $0 < \theta_0 < \theta_1$. (b) Para la prueba el inciso (a), calcule la probabilidad del error tipo II.