

Examen de Estadística (junio de 2024)

1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra de una distribución doble exponencial con función de densidad

$$f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|},$$

en donde $\theta > 0$. (a) Determine el estimador $\hat{\theta}$ de máxima verosimilitud para θ . (b) Decir, con demostración, si el estimador $\hat{\theta}$ es insesgado. (c) En caso de que $\hat{\theta}$ no sea insesgado proponer un estimador insesgado para θ .

2. Sea $f(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbf{I}_0^\infty(x)$ en donde $\theta > 0$. (a) Verifique que $f(x)$ es una función de densidad. (b) Calcule la información de Fisher de una muestra X_1, \dots, X_n de una población X que tiene a $f(x)$ como su función de densidad. (c) Determine la cota inferior de Cramér y Rao para la varianza del estimador $\hat{\theta}$ de máxima verosimilitud para θ .

3. Sea X_1, \dots, X_n una muestra de la población X con función de densidad $f(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbf{I}_\theta^\infty(x)$. Demuestre que el estadístico $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ es suficiente para θ .

4. (a) Escribir la definición de un estadístico completo y dar un ejemplo de tal estadístico. (b) Enunciar el teorema de Lehmann-Scheffé. (c) Sea X_1, \dots, X_n una muestra de la población X con función de densidad $f(x) = \theta^{-1} \mathbf{I}_0^\theta(x)$ en donde $\theta > 0$. Usar el teorema de Lehmann-Scheffé para probar que $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ es un estimador insesgado de varianza mínima uniforme (UMVUE).

5. Sea $X \sim f(x|\theta)$ en donde

$$f(x|\theta) = \frac{3}{\theta^3} x^2 \mathbf{I}_0^\theta(x)$$

y $\theta > 0$. (a) Calcular la función, $F(x)$, de distribución acumulada de X . (b) Usar la siguiente muestra de una población uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 1]$

0.551, 0.065, 0.324, 0.551, 0.622,

para generar una muestra de tamaño 5 de la población X . (c) Usar la muestra generada en el punto anterior y el hecho de que $F(X) \sim \text{Uni}(0, 1)$ para calcular un intervalo al 95% de confianza para θ .

6. Sea X_1, \dots, X_n una muestra de una población con distribución exponencial con parámetro $\theta > 0$. Sea $\alpha \in (0, 1)$. Use el teorema de Neyman y Pearson para determinar la región de rechazo óptima con α como la probabilidad del error tipo I, para el par de hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$ en donde $\theta_0 < \theta_1$ son conocidos.