

**EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA. PCCM.
ENERO DE 2020.**

- Ejercicio 1.** a) *Mostrar que $C = Z(X^3Y + Y^3Z + Z^3X)$ en coordenadas homogéneas $[X : Y : Z]$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ es una curva suave.*
b) *Dar las ecuaciones de la explosión (Blow-up) de la curva C en el punto $p = [0 : 0 : 1]$.*

- Ejercicio 2.** a) *Mostrar que la imagen de la aplicación*

$$\varphi: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^n : t \rightarrow (t, t^2, \dots, t^n)$$

es una variedad afín no singular de dimensión uno.

- b) *Mostrar que la preimagen de una variedad afín por un morfismo es una variedad afín.*

Ejercicio 3. *Sea $Y \subset \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie de grado mayor o igual a 2. Supongamos que Y contiene una subvariedad lineal (i.e. un subespacio proyectivo) de dimensión $r \geq \frac{n}{2}$. Prueba que Y es singular.*

Ejercicio 4. *Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un morfismo dominante entre variedades. Sea $y \in \phi(X)$ y sea Z una componente irreducible de $\phi^{-1}(y)$. Demuestra que existen abiertos no vacíos $U \subset X$, $V \subset Y$ tales que:*

- (i). $\phi(U) \subset V$
- (ii). $\phi|_U : U \rightarrow V$ es dominante
- (iii). $y \in V$
- (iv). $Z \cap U \neq \emptyset$

Ejercicio 5. *Determina las componentes irreducibles del conjunto algebraico afín $X \subset \mathbb{A}^3$ definido por*

$$X = V(y^2 - xz, z^2 - y^3)$$

.

Ejercicio 6. *Demuestra que el anillo de funciones regulares de $X = \mathbb{A}^2 - \{(0, 0)\}$ es isomorfo a $k[x, y]$ y concluye que X no es una variedad afín.*