

**Examen general de Geometría Algebraica. Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH.**  
**27 de Enero de 2017. Duración 4 horas**

En todo lo que sigue, los conjuntos algebraicos están definidos sobre un campo algebraicamente cerrado.

1. (a) Demuestra que  $\mathbb{A}^2 - \{(0, 0)\}$  no es un conjunto algebraico afín.  
 (b) Si identificamos a  $\mathbb{A}^2$  con  $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$  de la manera natural. Demuestra que la topología de Zariski sobre  $\mathbb{A}^2$  no es la misma que el producto de topologías de Zariski sobre las dos copias de  $\mathbb{A}^1$ .
2. Consideremos el conjunto  $Y := \{(t^2, t^3) | t \in \mathbb{C}\}$ .  
 (a) Demuestra que  $Y$  es una variedad algebraica y calcular su dimensión.  
 (b) Sea

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{A}^1 &\rightarrow \mathbb{A}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3). \end{aligned}$$

Demuestra que  $\phi$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{A}^1$  en  $Y$ .

- (c) ¿Es  $\phi$  un isomorfismo algebraico de  $\mathbb{A}^1$  en  $Y$ ? Justificar.
3. Determine los polinomios de Hilbert y los grados de las siguientes variedades:  
 (a) El plano proyectivo  $\mathbb{P}_k^2$ , y  
 (b)  $\{P\}$  donde  $P$  es un punto de  $\mathbb{P}_k^3$ .
4. Desingularizar la curva plana afín  $V(y^2 - x^3)$ .
5. Sea  $Y$  una hipersuperficie reducible y sea  $Y = \cup Y_j$  su unión en componentes irreducibles. Prueba que si  $y \in Y_i \cap Y_j$ , entonces  $y$  es un punto singular de  $Y$ .
6. Dada una variedad proyectiva  $X$ , denotamos por  $S(X)$  su anillo de coordenadas homogéneo.  
 Sea  $C$  la imagen del morfismo  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2, \phi([a : b]) = [a^2 : ab : b^2]$ .  
 Demuestra que  $C \simeq \mathbb{P}^1$  pero  $S(C)$  no es isomorfo a  $S(\mathbb{P}^1)$ .