

**EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA**  
**POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH**  
**24 DE ENERO DE 2025**

*En todos los problemas asumir que el campo  $\mathbb{K}$  es algebraicamente cerrado.*

**Problema 1.** Sea  $X = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$  donde  $p_i \neq p_j$  si  $i \neq j$ . Mostrar que el anillo de coordenadas de  $X$  es isomorfo a  $\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{K}$ .

**Problema 2.** Considerar la aplicación de Veronese  $\nu_2 : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ ,  $(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2)$ . Sean  $X = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  y  $Y = \nu_2(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1)$ . Demostrar que  $A^h(X)$  no es isomorfo a  $A^h(Y)$ , donde  $A^h(\cdot)$  denota el anillo de coordenadas homogéneo.

**Problema 3.** Considerar enteros  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Determinar el campo de funciones racionales de  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^m$ .

**Problema 4.** Sea  $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  donde  $f \in k[x_0, \dots, x_n]$  es un polinomio homogéneo irreducible. Asumir que existe una variedad proyectiva irreducible  $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  tal que  $X \subseteq Y$ . Demostrar que o bien  $Y = X$  o bien  $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ .

**Problema 5.** Sea  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  un polinomio y  $X = V(y^2 - f(x)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ . Mostrar que  $X$  es singular en un punto  $(x_0, y_0)$  si y sólo si  $y_0 = 0$  y  $x_0$  es una raíz múltiple de  $f(x)$ .

**Problema 6.** Sean  $X$  y  $Y$  variedades irreducibles afines y sean  $x \in X$ ,  $y \in Y$  puntos no singulares. Mostrar que  $(x, y) \in X \times Y$  es un punto no singular.

**Problema 7.** Sea  $X = V(xy - x^5 - y^5) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ . Describir la transformada estricta de  $X$  bajo la explosión del origen de  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$  y su intersección con el divisor excepcional.

**Problema 8.**

(a) Sea  $\phi : X \rightarrow Y$  un morfismo de variedades afines irreducibles. Sean  $p \in X$  y  $q = \phi(p) \in Y$ . Mostrar que  $\phi$  induce una aplicación lineal  $d_p\phi : T_pX \rightarrow T_qY$ .

(b) Sea  $X = V(x - y^2) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ ,  $Y = V(y) = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1 \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ . Sea  $\phi : X \rightarrow Y$ ,  $(x, y) \mapsto x$ . Mostrar que  $d_{(0,0)}\phi : T_{(0,0)}X \rightarrow T_0Y$  es la función cero.