

Examen general de Geometría Algebraica. Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH.

Viernes 16 de Junio de 2017. Duración 4 horas

1. Sea X una variedad afín definida sobre un campo k (no necesariamente algebraicamente cerrado). Establezca una biyección entre los puntos de X y el conjunto $\text{Hom}_K(A(X), k)$ de homomorfismos de k -álgebras entre el anillo coordenado $A(X)$ de X y el campo k .
2. Sea X un espacio topológico irreducible. Demuestre que todo abierto $U \subseteq X$ no vacío es denso. Demuestre que si X es una variedad algebraica y $f : X \rightarrow k$ es una función regular que se anula en un abierto no vacío de X , entonces $f \equiv 0$.
3. Determine los polinomios de Hilbert y los grados de las siguientes variedades:
 - (a) El espacio proyectivo \mathbb{P}_k^{2017} de dimensión 2017, y
 - (b) $\{P\}$, donde P es un punto del plano proyectivo \mathbb{P}_k^2 .
4. Desingularizar la curva plana afín $V(y^2 - x^2 + x^3)$.
5. Sea W una variedad, denotamos por $A(W)$ el anillo coordenado de W .
 - (a) Sea Y la curva plana $y = x^2$ (es decir, Y es el conjunto de ceros del polinomio $f = y - x^2$). Demuestra que $A(Y)$ es isomorfo al anillo de polinomios de una variable sobre \mathbb{K} .
 - (b) Sea Z la curva plana definida por el polinomio $xy = 1$. Demuestra que $A(Z)$ no es isomorfo al anillo de polinomios en una variable sobre \mathbb{K} .
 - (c) Sea f un polinomio cuadrático irreducible en $\mathbb{K}[x, y]$, y consideremos W la cónica definida por f . Demuestra que $A(W)$ es isomorfo a $A(Y)$ o $A(Z)$.
6. Demuestra que la superficie cuadrática $Q := \{xy - zw = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ es birracional a \mathbb{P}^2 pero no es isomorfa a \mathbb{P}^2 .