

**EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA. PCCM.
22 DE FEBRERO DE 2021.**

Ejercicio 1. Sea $Q \subset \mathbb{P}^3$ la variedad proyectiva definida por el conjunto de ceros de $xy - zw$ ($(x : y : z : w)$ son las coordenadas homogéneas). Esta variedad se llama “la cuádrica no singular”.

1. Demuestre que Q es birracionalmente equivalente pero no isomorfa a \mathbb{P}^2 .
2. Sea f la función racional definida sobre Q que está representada por $\frac{x}{z}$. Calcule el abierto máximo donde f está definida.

Ejercicio 2. Sea X un espacio topológico irreducible. Demuestre que todo abierto $U \subseteq X$ no vacío es denso. Demuestre que si X es una variedad algebraica y $f : X \rightarrow k$ es una función regular que se anula en un abierto no vacío de X , entonces f es la función nula.

Ejercicio 3. Sea k un campo algebraicamente cerrado. Sean $h_1, \dots, h_n \in k[x_1, \dots, x_m]$ y consideremos el morfismo $\phi : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ dado por $\phi(p) := (h_1(p), \dots, h_n(p))$. Demuestra que ϕ es sobreyectivo si y sólo si para todo $a_1, \dots, a_n \in k$, el ideal $(h_1 - a_1, \dots, h_n - a_n)$ no es todo el anillo $k[x_1, \dots, x_m]$.

Ejercicio 4. Sea p un punto de \mathbb{P}^2 . Demuestra que $\mathbb{P}^2 - \{p\}$ no puede ser una variedad proyectiva ni variedad afín.

Ejercicio 5. Considera la aplicación regular $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2$ dada por (t^2, t^3) .

1. Demuestra que la imagen de f es un conjunto algebraico afín y calcula el ideal que determina a tal conjunto.
2. Demuestra que f no es un isomorfismo entre \mathbb{A}^1 y su imagen.

Ejercicio 6. Considera la aplicación dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (a_0, \dots, a_n) &\mapsto (a_0 : \dots : a_n) \end{aligned}$$

Sea $Y \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva. Demuestra que el cono afín sobre Y definido como

$$\mathcal{C}(Y) = \varphi^{-1}(Y) \cup \{0_{\mathbb{A}^{n+1}}\}$$

es una variedad afín de \mathbb{A}^{n+1} .