

Posgrado en Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH.
Examen General de Geometría Algebraica: Enero 2019.

Instrucciones. Se deben seleccionar al menos 5 problemas para responder. \mathbb{K} siempre denota un campo algebraicamente cerrado. Todas las variedades se consideran espacios topológicos con la topología de Zariski. En particular, homeomorfismo siempre significa homeomorfismo en la topología de Zariski.

Problema 1: Considera el conjunto $Y := \{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{K}\}$.

- i) Demuestra que Y es una variedad algebraica y calcula su dimensión.
- ii) Considera la parametrización

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{K}^1 &\rightarrow \mathbb{K}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3),\end{aligned}$$

demuestra que ϕ es un homeomorfismo de \mathbb{K} en Y .

- iii) ¿Es ϕ un isomorfismo algebraico de \mathbb{K} en Y ?, justifica tu respuesta.

Problema 2: Sean $L \subset \mathbb{P}^n$ un subespacio lineal de dimensión $n - 1$, $X \subset L$ una subvariedad proyectiva irreducible y un punto $y_0 \in \mathbb{P}^n \setminus L$ dado. Para cada punto $x \in X$ consideramos L_x la línea recta que une el punto x con y_0 y construimos el conjunto

$$Y := \cup_{x \in X} L_x.$$

Demuestra que Y es una variedad proyectiva irreducible y que su dimensión es igual a $\dim(X) + 1$.

Problema 3: Sean r, s enteros positivos. Supón que existe una aplicación regular

$$f : \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^s;$$

demuestra que $r \leq s$ ó f es el morfismo constante.

Problema 4: i) Demuestra que los abiertos de Zariski principales forman una base de la topología de Zariski de cualquier variedad X . Aún más, todo abierto de X es unión de un número finito de abiertos principales.

ii) Demuestra que toda variedad satisface que toda cubierta abierta admite una subcubierta finita.

iii) Demuestra que toda aplicación biyectiva $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ es un homeomorfismo. Da un ejemplo de un campo \mathbb{K} y un homeomorfismo de \mathbb{K} que no es un morfismo de variedades.

Problema 5: Considera la subvariedad

$$X := V(xt_1 - yt_0) \subset \mathbb{K}^2 \times \mathbb{P}^1,$$

donde (x, y) son las coordenadas de \mathbb{K}^2 y $(t_0 : t_1)$ las de \mathbb{P}^1 .

- i) Demuestra que la primera proyección $\pi : X \rightarrow \mathbb{K}^2$ define una aplicación birracional.
- ii) Calcula el abierto en que su inversa está definida. Calcula la preimagen de cada punto de \mathbb{K}^2 . Sea

$$Z := V(y^2 - x^2 + y^3),$$

y calcula las componentes irreducibles de $\pi^{-1}(Z)$.

Problema 6: Discute si $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y \mathbb{P}^2 son o no biracionalmente equivalentes.

Problema 7: Considera

$$X = V(y^2 - x^3(x-1)(x-2)) \subset \mathbb{K}^2.$$

- i) Describe todos los puntos singulares de X .
- ii) Halla ecuaciones para el espacio tangente a X en los puntos lisos (esto es no singulares).