

EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH
16 DE JUNIO DE 2022

En todo lo que sigue, los conjuntos algebraicos están definidos sobre un campo algebraicamente cerrado.

Ejercicio 1. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo sobreyectivo de variedades afines. Prueba que $\dim(X) \geq \dim(Y)$.

Ejercicio 2. Identificamos el espacio de matrices de $n \times n$ con entradas en k por \mathbb{A}^{n^2} . Sea $Y := \mathbb{A}^{n^2} \times \mathbb{A}^{n^2}$. Definimos

$$E := \{(A, B) \in Y : A, B \text{ tienen un eigenvector común}\} \subset Y.$$

Prueba que E es un cerrado en Y .

Ejercicio 3. Sean H_i, H_j los hiperplanos en \mathbb{P}^n definidos por $x_i = 0, x_j = 0$ respectivamente. Demuestra que $\mathcal{O}(P^n - (H_i \cap H_j)) \simeq k$.

Ejercicio 4. Probar que la imagen del mapeo $\phi : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^3$ definido por $t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$ está dada por $V(\langle x^4 - y^3, x^5 - z^3, y^5 - z^4 \rangle)$.

Ejercicio 5. Demostrar que un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo si y sólo si f es homeomorfismo (con la topología de Zariski) y para todo $p \in X$ el homomorfismo $f^* : \mathcal{O}_{Y, f(p)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, p}$ dado por $f(g) = g \circ f$ es un isomorfismo.

Ejercicio 6. Sea Y el conjunto de ceros de \mathbb{A}^2 del polinomio $x^2 + 2xy + y^2 - x^3$. Demuestra que el único punto singular de Y es el origen. Explota el origen de \mathbb{A}^2

- Demuestra que la transformada estricta de Y y el divisor excepcional se cortan en un sólo punto
- Demuestra que la transformada estricta de Y es no singular.

Ejercicio 7. Sean X una variedad proyectiva y sea Y una variedad afín. Demuestra que si X es isomorfa a Y , entonces X es un punto.

Ejercicio 8. Sea $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una variedad proyectiva. Demuestra que X es una hipersuperficie si y sólo si $\dim(X) = n - 1$.