

**EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA. PCCM.  
17 DE ENERO DE 2022.**

En todo lo que sigue, los conjuntos algebraicos están definidos sobre un campo algebraicamente cerrado.

**Ejercicio 1.** Determine los polinomios de Hilbert y los grados de las siguientes variedades:

1. El espacio proyectivo  $\mathbb{P}_k^{2021}$  de dimensión 2021, y
2.  $\{P\}$  donde  $P$  es un punto del espacio proyectivo  $\mathbb{P}_k^3$  de dimensión 3.

**Ejercicio 2.** Prueba que  $\mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^3$  es birracionalmente equivalente a  $\mathbb{P}_k^N$  para cierto entero positivo  $N$ . Deduzca el campo de las fracciones racionales  $k(\mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^3)$  de  $\mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^3$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $\varphi : \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  el mapeo definido por:  $\varphi([x : y : z]) = [x - y : z]$ . Prueba que  $\varphi$  no es un morfismo.

**Ejercicio 4.** Sea  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  un polinomio irreducible. Demuestra que  $\mathbb{A}^n \setminus V(f)$  es isomorfo a una hipersuperficie.

**Ejercicio 5.** Considera la aplicación  $\varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  definida por  $\varphi([x : y : z]) = [yz : xz : xy]$ .

1. Demuestra que  $\varphi$  es birracional.
2. Determina los abiertos  $U, V \subset \mathbb{P}^2$  donde  $\varphi : U \rightarrow V$  es un isomorfismo.
3. Determina los puntos donde  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  no son regulares.

**Ejercicio 6.** Si  $X$  es variedad y  $p \in X$  es cualquier punto, denotamos por  $T_p(X)$  el espacio tangent de Zariski a  $X$  en el punto  $p$ .

Sea  $X \subset A^3$  una curva suave e irreducible tal que  $I(X) = (f, g)$ . Demuestra que  $T_p(X) = T_p(F) \cap T_p(G)$  para todo  $p \in X$ , Donde  $F$  y  $G$  son las superficies definidas por  $f$  y  $g$  respectivamente.

**Ejercicio 7.** Una variedad  $X$  se dice normal en un punto  $p \in X$ , si  $\mathcal{O}_{X,p}$  es un anillo enteramente cerrado.  $X$  es normal si es normal en cada punto  $p \in X$ .

Sea  $Y$  una variedad afín. Demuestra que  $Y$  es normal si y sólo si  $A(Y)$  es enteramente cerrado.