

EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

ENERO 2024

1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con una métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Probar que las isometrías $f : U \rightarrow U$ de tal métrica forman un grupo.
2. Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva suave con rapidez unitaria cuya curvatura y torsión son positivas. Se define la curva

$$\beta(s) = \int_{s_0}^s B(u) du,$$

siendo $B(s)$ el vector binormal a α en s . Probar que β está parametrizada con rapidez unitaria y calcular su curvatura y su torsión.

3. Mostrar que la superficie en \mathbb{R}^3 dada por la parametrización

$$F(x, y) = (\cosh(x) \cos(y), \cosh(x) \sin(y), x)$$

es una superficie mínima (es decir, de curvatura media $H = 0$).

4. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto con una métrica Riemanniana de la forma $E(x, y)dx^2 + G(x, y)dy^2$. Dado el marco ortonormal $e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial x}$ y $e_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y}$, mostrar que:
 - a) El comarco correspondiente es $\theta^1 = \sqrt{E} dx$, $\theta^2 = \sqrt{G} dy$.
 - b) La forma de conexión es $\omega_2^1 = \frac{(\sqrt{E})_y}{\sqrt{G}} dx - \frac{(\sqrt{G})_x}{\sqrt{E}} dy$ con respecto a dicho marco.
 - c) La curvatura Gaussiana es $K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{G})_x}{\sqrt{E}} \right)_x + \left(\frac{(\sqrt{E})_y}{\sqrt{G}} \right)_y \right\}$.

Hallar los símbolos de Christoffel. Probar que si cada curva de la forma $x \mapsto (x, \text{constante}) \subset U$ es geodésica, entonces E es función de x solamente.

5.
 - a) Sea C el cono en \mathbb{R}^3 parametrizado por $F(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, ct)$, con $c \in \mathbb{R}$ constante. Mostrar que un vector tangente a C gira un ángulo $\frac{2\pi}{\sqrt{1+c^2}}$ al transportarlo paralelamente a lo largo del círculo horizontal $z = ct_0$ en C .
 - b) Argumentar que si dos superficies suaves M y M^* son tangentes a lo largo de una curva suave γ , el transporte paralelo a lo largo de γ es el mismo para ambas superficies.
 - c) Sea $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unitaria. Usar los incisos anteriores para mostrar que, al transportar paralelamente un vector tangente a S^2 a lo largo de un círculo de latitud $z = z_0$ en S^2 , el giro de dicho vector es por un ángulo igual a $2\pi z_0$.
6.
 - a) Probar la identidad de Jacobi: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ para cualesquiera campos vectoriales suaves X, Y, Z en una variedad suave.
 - b) Sea G un grupo de Lie con una métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sean X, Y, Z campos vectoriales en G invariantes por la izquierda.
 - 1) Probar que $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$.
 - 2) Si $X, Y \in T_e G$ son ortonormales y σ es el plano generado por ellos, probar que la curvatura seccional $K(\sigma)$ correspondiente al plano σ está dada por $K(\sigma) = \frac{1}{4}\| [X, Y] \|^2$.