

Examen General de Teoría de Gráficas

15 de junio de 2015

Definición 1: Un conjunto de representantes de una partición $\{A_1, \dots, A_m\}$ es un conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$ de m elementos que satisfacen que $x_i \in A_i$ para toda i .

Definición 2: El producto \square de dos gráficas G y H se define como sigue. $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$, y el vértice (x_1, y_1) es adyacente a (x_2, y_2) si se cumple una de las siguientes condiciones:

- $x_1 = x_2$ y y_1 es adyacente a y_2 ,
- $y_1 = y_2$ y x_1 es adyacente a x_2 .

1. Prueba que todo árbol tiene más vértices de grado 1 que vértices de grado 3.
2. Sea k un entero y X un conjunto con mk elementos para algún natural m . Supón que tienes dos particiones de X en k -conjuntos. Demuestra que puedes escoger un conjunto de m representantes común a ambas particiones.
3. Sea G una gráfica 3-conexa y sea xy una arista. Demuestra que G/xy es 3-conexa si y sólo si $G - \{x, y\}$ es 2-conexa, donde G/xy es la gráfica que se obtiene al contraer la arista xy .
4. Dada una digráfica D , una coloración $c : V(D) \rightarrow \mathbb{N}$ se llama *brincolina* si para toda arista (dirigida) xy se tiene que $c(y) = c(x) + 1$. Demuestra que D tiene una coloración brincolina si y sólo si todos sus ciclos (no dirigidos) tienen la mitad de sus aristas en una dirección y la otra mitad en la otra.
5. Prueba que G admite una k -coloración propia si y sólo si $G \square K_k$ contiene un conjunto independiente de tamaño $|V(G)|$.
6. Demuestra que toda gráfica conexa, plana, de n vértices, m aristas y cuello g satisface $m \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.