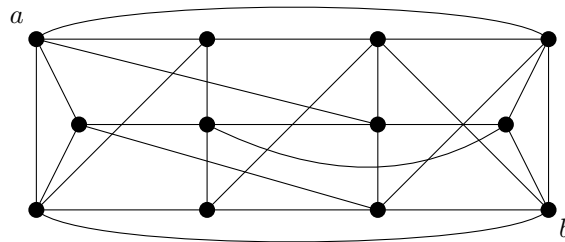


### Examen Básico de Gráficas

Morelia, 14 de junio de 2023

Tiempo: 4 hrs.

1. ¿Existe un torneo que no sea fuertemente conexo que no tenga pozo ni fuente? En caso de que no, demuéstalo. En caso de que sí, encuentra uno de orden mínimo.
2. Sea  $G$  la gráfica cuyos vértices son los enteros entre 1 y 20, donde dos son adyacentes si y solo si uno divide al otro. Determina si  $G$  es aplanable.
3. Se sientan 20 personas (denominadas  $q_1, \dots, q_{20}$ ) alrededor de una mesa por algunas horas. Toda persona  $q_i$  logró platicar con todos los demás excepto con  $q_{i\pm 5}$ , con  $q_{i\pm 6}$  y con  $q_{i+10}$ , tomando subíndices módulo 20. Se quieren dividir a esas 20 personas en comités disjuntos (tal que toda persona esté en un comité), de modo que cualquier par de personas en el mismo comité hayan hablado durante la reunión. ¿Cuál es el mínimo número de comités que se puede formar?
4. Sea  $G$  una gráfica que contiene un ciclo  $C$  y una trayectoria  $P$  entre dos vértices de  $C$  de longitud al menos 100. Demuestra que  $G$  contiene un ciclo con al menos 10 vértices.
5. Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , sea  $G$  la gráfica cuyos vértices son las ternas y las cuartetos contenidas en  $X$ , donde dos vértices  $u$  y  $v$  son adyacentes si  $u$  es una cuarteta,  $v$  es una terna y  $u \cap v \neq \emptyset$ . Encuentra el número cromático en aristas de  $G$ .
6. Determina (con justificación) el número de vértices que hay que quitar de la gráfica en el dibujo para desconectar los vértices  $a$  y  $b$ .



7. Sea  $G$  un bloque 3-regular con 50 vértices. Prueba que  $G$  tiene un ciclo de longitud al menos 10.