

# Examen Básico de Gráficas

13 de enero de 2025

Tiempo: 4 horas

Responda a las siguientes preguntas mostrando todos los pasos y razonamientos.

1. Sea  $G = (V, E)$  gráfica con  $n$  vértices. Pruebe que si  $|E(G)| > (n-1)(n-2)/2$  entonces  $G$  es conexa.
2. Calcule el número cromático de  $C_4 \square K_4$ , donde  $C_4$  es el ciclo con 4 vértices y  $K_4$  es la gráfica completa con 4 vértices.
3. En una fiesta se quieren sentar ocho personas en mesas. Cada mesa debe cumplir con la condición de que todas las personas sentadas en ella sean amigas entre sí. A continuación, se muestra una tabla donde se indica con una “X” si dos personas son amigas. Por ejemplo, si hay una “X” en la intersección de la fila de la persona A con la columna de la persona B, significa que A y B son amigos.

	Ana	Beto	Carlos	Diana	Ema	Fabián	Gaby	Héctor
Ana	-	X	X			X		
Beto	X	-		X	X	X		
Carlos	X		-			X	X	X
Diana		X		-	X		X	
Ema		X		X	-			X
Fabián	X	X	X			-	X	X
Gaby			X	X		X	-	
Héctor			X		X	X		-

Determine el mínimo número de mesas que se necesitan para sentar a todos.

4. Una gráfica  $(V, E)$  es *trihamiltoniana* si existe una partición  $E = A \sqcup B \sqcup C$  de las aristas de manera que  $(V, A)$ ,  $(V, B)$  y  $(V, C)$  son hamiltonianas. Encuentre el mínimo  $n$  para el cual existe una gráfica trihamiltoniana.
5. Pruebe que  $\kappa(Q_n) = n$  para toda  $n \geq 2$ , donde  $Q_n$  denota el hipercubo de dimensión  $n$  y  $\kappa(Q_n)$  es la conectividad en vértices de  $Q_n$ .
6. Sea  $f$  un automorfismo de un árbol  $G$  tal que  $f$  no fija ningún vértice. Pruebe que existe una única arista  $uv$  tal que  $f$  intercambia sus vértices.
7. Encuentre el mínimo número de triángulos que debe tener una gráfica en 6 vértices con 10 aristas.