

# Examen General de Gráficas

22 de enero de 2015

1. **Verdadero o falso** (con justificación). En toda gráfica conexa existe un camino que pasa por cada arista exactamente dos veces: una de ida y una de vuelta.
2. Una escuela ofrece 100 cursos. Cada curso tiene a lo más 5 alumnos, y cada alumno se puede inscribir a lo más a 3 cursos. La escuela elabora los horarios de manera que los cursos de un mismo estudiante sean a distinta hora. Pruebe que la escuela siempre puede hacer los horarios si dispone de 10 horas en las cuales acomodarlos, sin importar la elección de cursos de los estudiantes.
3. Demuestre que para todo  $n$  entero positivo existe una gráfica simple cuyo grupo de automorfismos es cíclico de orden  $n$ .
4. Sea  $G$  una gráfica plana cuyas caras son todas octágonos y cuadrados. Asuma además que cada par de caras tienen a lo más una arista en común. Pruebe que si  $G$  tiene 10 octágonos entonces tiene al menos 16 cuadrados.
5. Sea  $G$  una gráfica que contiene un ciclo  $C$ . Supongamos que  $G$  tiene dos vértices de  $C$ ,  $x$  y  $y$ , tales que existe (en  $G$ ) un camino de longitud  $k$  entre  $x$  y  $y$ . Demuestre que  $G$  tiene un ciclo de longitud al menos  $\sqrt{k}$ .
6. Pruebe que si  $G$  es 2-conexa y su número de independencia es 2 entonces es hamiltoniana.