

Examen Básico de Gráficas

Morelia, 19 de enero de 2023

Tiempo: 4 hrs.

En todos los ejercicios justifique su respuesta.

1. En una cuadrícula de $n \times n$ hay $2n$ cuadritos pintados de negro de tal forma que en cada renglón y en cada columna hay exactamente 2 cuadritos negros. Demuestre que es posible elegir n cuadritos negros de modo que haya uno de ellos en cada columna y uno en cada renglón.
2. Sea $N > 1$ un entero. Determine el menor entero k con la siguiente propiedad: Si G es una gráfica con N vértices en la que cada vértice tiene grado al menos k , entonces G es conexa.
3. Sean G y H dos gráficas, cada una con 40 vértices y grado mínimo 23. Sean u_1 y u_2 dos vértices arbitrarios de G , y v_1 y v_2 dos vértices arbitrarios de H . Construimos la gráfica K agregando a la unión de G y H las aristas u_1v_1 y u_2v_2 . Pruebe que K es hamiltoniana.
4. Pruebe que si G es un árbol que no es una estrella entonces G es isomorfo a una subgráfica de \overline{G} (Hint: eliminar dos hojas adyacentes a vértices distintos).
5. Un centro de convenciones ofrece una sala de conferencia para eventos. Durante el fin de semana ofrece 15 horarios distintos (de una hora cada uno de modo que no hay intersección entre dos de ellos). En cierto fin de semana 12 organizaciones contactaron al centro de convenciones para llevar a cabo sus actividades. Cada organización requiere únicamente una hora y solicitó su horario de acuerdo a lo expuesto en la siguiente tabla:

Organización	Horarios
1	1,2,5,7,11
2	2,3,4,6,7,8,9,10
3	2,4,5,7,10,12,13
4	1,2,7,11,12
5	1,2,5,11,12
6	2,4,5,6,8,9,10,11,13,14
7	1,2,5,7,11,12
8	3,4,6,7,12,13,14,15
9	1,5,7,11,12
10	1,2,5,7,12
11	4,7,8,9,12,13,14,15
12	2,5,7,11,12

Determine si le es posible al centro de convenciones acomodar a las 12 organizaciones en los horarios requeridos.

6. Se tiene una gráfica conexa con grado mínimo al menos 2. Demuestre que existen dos vértices adyacentes tales que al quitarlos no desconectan la gráfica.
7. Denotamos por G_n a la gráfica completa en n vértices menos una arista, y por $r(G, H)$ al mínimo entero M tal que toda gráfica con M vértices o bien tiene a G como subgráfica o bien su complemento tiene a H como subgráfica. Pruebe que para toda $n, m \geq 3$ se tiene que $r(G_n, G_m) \leq r(n, m) - 3$, donde $r(n, m)$ es el número de Ramsey usual.