



FIGURA 1.

Ejercicios para el Examen General de Teoría de Gráficas

Definición 1: El producto \square de dos gráficas G y H se define como sigue. $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$, y el vértice (x_1, y_1) es adyacente a (x_2, y_2) si se cumple una de la siguientes condiciones:

- $x_1 = x_2$ y y_1 es adyacente a y_2 ,
- $y_1 = y_2$ y x_1 es adyacente a x_2 .

1. Sea G una gráfica con $\delta(G) \geq 3$. Demuestre que G contiene un ciclo con una cuerda (es decir, un ciclo con una arista entre vértices no consecutivos).
2. Definimos el operador de líneas iterado como $L^{(1)}(G) := L(G)$, y $L^{(n)}(G) := L(L^{(n-1)}(G))$ si $n \geq 2$. Sea G la gráfica en la Figura 1. Pruebe que $|V(L^{(n)}(G))|$ tiende a ∞ cuando n tiende a ∞ .
3. Se tiene una inmersión de una gráfica conexa G en la esfera de modo que sus caras son 12 triángulos, 6 cuadrados y 8 heptágonos. Pruebe que G tiene al menos un vértice de grado a lo más 3.
4. Determine los enteros positivos n tales que existe una gráfica plana no trivial con n vértices isomorfa a su dual.
5. (a) Sea G una gráfica con al menos $n + 1$ vértices. Suponga que para toda $(n + 1)$ -ada (v_1, \dots, v_{n+1}) de vértices de G existe un ciclo que los recorre en el orden de la $(n + 1)$ -ada. Pruebe que G es n -conexa.
 (b) Muestre una gráfica 3-conexa y una cuarteta ordenada de sus vértices de modo que no haya ningún ciclo que contenga a esos vértices en ese orden.
6. Un grupo con 150 estudiantes toma clases en un salón con 150 asientos. En los primeros 100 días de clase, cada estudiante se sentó en 100 lugares distintos. Pruebe que es posible determinar un lugar para cada estudiante para cada uno de los siguientes 50 días de clase de modo que ningún estudiante ocupe el mismo lugar en dos días distintos de los primeros 150 días de clase.
7. Pruebe que $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.