

EXAMEN GENERAL DE MATROIDES

Lunes 22 de febrero de 2021

Resuelva los siguientes 5 ejercicios. Justifique todas sus respuestas.

Tiempo límite: 4 horas.

1. Sea E un conjunto finito y $\mathcal{D} \subseteq \wp(E)$. Detemine si los siguientes axiomas garantizan que \mathcal{D} es el conjunto de dependientes de un matroide sobre E .

(D1) $\emptyset \notin \mathcal{D}$,

(D2) Si $D_1 \in \mathcal{D}$ y $D_1 \subseteq D_2$ entonces $D_2 \in \mathcal{D}$.

(D3) Si D_1 y D_2 son elementos distintos de \mathcal{D} y $e \in D_1 \cup D_2$ entonces existe $D_3 \in \mathcal{D}$ tal que $D_3 \subseteq (D_1 \cup D_2) \setminus \{e\}$.

2. Las siguientes son representaciones sobre \mathbb{Z}_5 de los matroides M_1 y M_2 , respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para $i \in \{1, 2\}$ determine si M_i es (a) binario, (b) regular, (c) gráfico.

3. Llamemos *pregenerador* a un conjunto $X \subseteq E := E(M)$ tal que $cl^*(cl(X)) = E$. Sea $n \geq 5$ y sea M_n el matroide de ciclos de la gráfica completa K_n .

- De condiciones necesarias y suficientes en términos de k para que un circuito de M_n con k elementos sea coindependiente.
- Caracterice a los conjuntos pregeneradores de M_n .

4. Sea M el matroide transversal con conjunto base $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ determinado por la familia

$$\mathcal{A} = \{\{1, 5\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 8\}\}.$$

Sean $M_i = M/\{i\}$ para $i \in E$.

- Encuentre la representación geométrica de M_1 , M_5 y M_6 .
- Determine si M_1 , M_5 y/o M_6 son transversales, y en su caso encuentre una representación de cada uno como matroides transversales.

5. Pruebe o de contraejemplo.

(a) Para todo $A, B \subseteq E$

$$r(M \setminus A) + r(M \setminus B) \leq r(M \setminus (A \cup B)) + r(M \setminus (A \cap B)).$$

(b) Para todo $A, B \subseteq E$

$$r(M/A) + r(M/B) \leq r(M/(A \cup B)) + r(M/(A \cap B)).$$