

**EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA ALGEBRAICA  
ENERO DE 2017**

**Tiempo para realizar este examen: 4 horas. En todos los casos los grupos de homología se refieren a homología singular, simplicial o celular. Enunciar claramente las propiedades que se usen en la resolución de los problemas.**

Resuelva sólo **5** problemas

Propuesta de Noe:

- (i) Dado un grupo con una presentación

$$G \cong \langle S \mid R \rangle$$

La gráfica de Cayley tiene como vértices a los elementos del grupo  $g \in G$  y una arista entre los vértice  $g_1$  y  $g_2$  si hay un elemento  $s$  en los generadores tales que  $g_1 = sg_2$ . Pruebe que existe una biyección entre las cubiertas conexas de  $S^1 \vee S^1$  y gráficos de Cayley de grupos con dos generadores.

- (ii) Construya un ejemplo de dos complejos CW de dimensión 4 con el mismo grupo fundamental, misma homología, pero que no sean homotópicamente equivalentes. Discuta porqué esto no contradice el Teorema de Whitehead.
- (iii) Construya una aplicación suprayectiva  $f : S^n \rightarrow S^n$  de grado cero.
- (iv) Construya un ejemplo de un espacio con grupo fundamental  $\mathbb{Z}/5$ , homología concentrada en grados uno, cero y tres y justifique sus afirmaciones.
- (v) Calcular el grupo fundamental de
- $$\mathbb{R}^4 - \{\mathcal{P}_{xw} \cup \mathcal{P}_{yw} \cup \mathcal{P}_{zw}\},$$
- donde  $\mathcal{P}_{xw} = \{(x, 0, 0, w) \in \mathbb{R}^4\}$ ,  $\mathcal{P}_{yw} = \{(0, y, 0, w) \in \mathbb{R}^4\}$ ,  $\mathcal{P}_{zw} = \{(0, 0, z, w) \in \mathbb{R}^4\}$ .
- (vi) Demostrar que toda función continua  $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow S^1$  es homotópicamente nula.
- (vii) Calcular el cubriente universal de  $\mathbb{R}^5 - \{P_{xyz}\}$ , donde  $\{P_{xyz}\} = \{(x, y, z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5\}$ .
- (viii) Dar un ejemplo de subconjuntos  $U, V$  de un espacio topológico  $X$  tales que  $X = U \cup V$  y  $U \cap V \neq \emptyset$ , pero que no se pueda aplicar Mayer-Vietoris en ellos.
- (ix) Sea  $S$  una superficie cerrada con la homología de una 2-esfera. Pruebe que  $S$  es homeomorfa a una esfera. ¿Es cierto esto para 3- variedades cerradas?
- (x) Sea  $F_2$  el grupo libre en dos generadores. Pruebe que su subgrupo conmutador es infinitamente generado.
- (xi) Sea  $C$  un complejo de cadenas de tipo finito, pruebe que la característica de Euler de  $C$  es la misma que la de su homología  $H(C)$ .
- (xii) Proporcione una pareja de espacios  $(X, A)$  donde el axioma de escisión falla.