

**EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA ALGEBRAICA**  
**24 DE JUNIO DE 2015**

**Tiempo para realizar este examen: 4 horas. En todos los casos los grupos de homología se refieren a homología singular, simplicial o celular. Enunciar claramente las propiedades que se usen en la resolución de los problemas.**

Resuelva sólo **5** problemas

- (i) Construye el cubriente universal de la botella de Klein.
- (ii) Calcula grupo fundamental y homología de los siguientes espacios:
  - La botella de Klein
  - El espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^4$ .
- (iii) Considere  $T$  el toro bidimensional. ¿Puede cubrir  $T$  a la botella de Klein?, ¿puede cubrir la botella de Klein a  $T$ ?
- (iv) Sea  $n$  un entero mayor o igual a 2 y  $k < n$ . Considérese el encaje lineal  $\alpha : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por incluir  $(x_1, \dots, x_k)$  en las primeras  $k$  coordenadas  $(x_1, \dots, x_k, 0 \dots 0)$ . La aplicación  $\alpha$  se restringe a un encaje de  $\mathbb{R}^k - \{0\}$  en  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  y finalmente tras considerar la relación de equivalencia que define al espacio proyectivo real, en un encaje  $\alpha : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^n$ . El espacio proyectivo mutilado

$$\mathbb{P}^n / \mathbb{P}^k$$

se define como el espacio cociente resultante de identificar a un punto la imagen de  $\alpha$

Calcula la homología con coeficientes enteros del espacio

$$\mathbb{P}^7 / \mathbb{P}^5$$

Punto extra si puedes calcular  $K$ -homología compleja  $KU_*(\mathbb{P}^7 / \mathbb{P}^5)$  (los coeficientes son cero en los enteros impares y  $\mathbb{Z}$  en los enteros pares).

- (v) Sean  $f, g : S^n \rightarrow S^n$  funciones continuas de la  $n$ -esfera en sí misma. Supón que  $f$  y  $g$  no son antipodales para ningún  $x \in S^n$ . Demuestra que  $f \simeq g$ .
- (vi) Sea  $G$  un grupo no trivial y  $G \times S^n \rightarrow S^n$  una acción continua y libre, con  $n$  par. Probar que  $G \cong \mathbb{Z}_2$ .
- (vii) Sea  $G$  un grupo finito. ¿Existe una acción libre de  $G$  en  $\mathbb{R}^2$ ?
- (viii) Considere  $X$  un CW-complejo. Demuestre que:
  - (a) Si  $X$  tiene dimensión  $n$  entonces  $H_i(X) = 0$  para  $i > n$  y  $H_n(X)$  es libre.
  - (b)  $H_n(X)$  es libre con base en correspondencia biyectiva con las  $n$  células si no hay células de dimensión  $n - 1$  o  $n + 1$ .
  - (c) Si  $X$  tiene  $k$   $n$ -células, entonces  $H_n(X)$  es generado por a lo más  $k$  elementos.