

**EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA ALGEBRAICA
ENERO DE 2017**

Tiempo para realizar este examen: 4 horas. En todos los casos los grupos de homología se refieren a homología singular, simplicial o celular. Enunciar claramente las propiedades que se usen en la resolución de los problemas.

Resuelva sólo 5 problemas

Propuesta de Noe:

- (i) Dado un grupo con una presentación

$$G \cong \langle S \mid R \rangle$$

La gráfica de Cayley tiene como vértices a los elementos del grupo $g \in G$ y una arista entre los vértice g_1 y g_2 si hay un elemento s en los generadores tales que $g_1 = sg_2$. Pruebe que existe una biyección entre las cubrientes conexas de $S^1 \vee S^1$ y gráficos de Cayley de grupos con dos generadores.

- (ii) Construya un ejemplo de dos complejos CW de dimensión 4 con el mismo grupo fundamental, misma homología, pero que no sean homotópicamente equivalentes. Discuta porqué esto no contradice el Teorema de Whitehead.
- (iii) Construya una aplicación suprayectiva $f : S^n \rightarrow S^n$ de grado cero.
- (iv) Construya un ejemplo de un espacio con grupo fundamental $\mathbb{Z}/5$, homología concentrada en grados uno, cero y tres y justifique sus afirmaciones.
- (v) Calcular el grupo fundamental de
- $$\mathbb{R}^4 - \{\mathcal{P}_{xw} \cup \mathcal{P}_{yw} \cup \mathcal{P}_{zw}\},$$
- donde $\mathcal{P}_{xw} = \{(x, 0, 0, w) \in \mathbb{R}^4\}$, $\mathcal{P}_{yw} = \{(0, y, 0, w) \in \mathbb{R}^4\}$, $\mathcal{P}_{zw} = \{(0, 0, z, w) \in \mathbb{R}^4\}$.
- (vi) Demostrar que toda función continua $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es homotópicamente nula.
- (vii) Calcular el cubriente universal de $\mathbb{R}^5 - \{P_{xyz}\}$, donde $\{P_{xyz}\} = \{(x, y, z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5\}$.
- (viii) Dar un ejemplo de subconjuntos U, V de un espacio topológico X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V \neq \emptyset$, pero que no se pueda aplicar Mayer-Vietoris en ellos.
- (ix) Sea S una superficie cerrada con la homología de una 2-esfera. Pruebe que S es homeomorfa a una esfera. ¿Es cierto esto para 3- variedades cerradas?
- (x) Sea F_2 el grupo libre en dos generadores. Pruebe que su subgrupo conmutador es infinitamente generado.
- (xi) Sea C un complejo de cadenas de tipo finito, pruebe que la característica de Euler de C es la misma que la de su homología $H(C)$.
- (xii) Proporcione una pareja de espacios (X, A) donde el axioma de escisión falla.