

**EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA ALGEBRAICA
ENERO DE 2017**

Tiempo para realizar este examen: 4 horas. En todos los casos los grupos de homología se refieren a homología singular, simplicial o celular. Enunciar claramente las propiedades que se usen en la resolución de los problemas.

Resuelva sólo 5 problemas

- (I) Dado un grupo con una presentación

$$G \cong \langle S \mid R \rangle$$

La gráfica de Cayley tiene como vértices a los elementos del grupo $g \in G$ y una arista entre los vértice g_1 y g_2 si hay un elemento s en los generadores tales que $g_1 = sg_2$. Pruebe que existe una biyección entre las cubrientes conexas de $S^1 \vee S^1$ y gráficos de Cayley de grupos con dos generadores.

- (II) Construya una aplicación suprayectiva $f : S^n \rightarrow S^n$ de grado cero.
(III) Construya un ejemplo de un espacio con grupo fundamental $\mathbb{Z}/5$, homología concentrada en grados uno, cero y tres y justifique sus afirmaciones.
(IV) Calcular el grupo fundamental de

$$\mathbb{R}^4 - \{\mathcal{P}_{xw} \cup \mathcal{P}_{yw} \cup \mathcal{P}_{zw}\},$$

donde $\mathcal{P}_{xw} = \{(x, 0, 0, w) \in \mathbb{R}^4\}$, $\mathcal{P}_{yw} = \{(0, y, 0, w) \in \mathbb{R}^4\}$, $\mathcal{P}_{xw} = \{(0, 0, z, w) \in \mathbb{R}^4\}$.

- (V) Calcular el cubriente universal de $\mathbb{R}^5 - \{P_{xyz}\}$, donde $\{P_{xyz}\} = \{(x, y, z, 0, 0) \in \mathbb{R}^5\}$.
(VI) Sea S una superficie cerrada con la homología de una 2-esfera. Pruebe que S es homeomorfa a una esfera. ¿Es cierto esto para 3- variedades cerradas?
(VII) Sea C un complejo de cadenas de tipo finito, pruebe que la característica de Euler de C es la misma que la de su homología $H(C)$.
(VIII) Proporcione una pareja de espacios (X, A) donde el axioma de escisión falla.