

# Examen básico de Topología

Resuelva cada uno de los siguientes problemas en una hoja separada. Todos los espacios se asume que son Hausdorff.

**Problema 1.** Pruebe directamente, es decir sin usar los teoremas de metrización, que un espacio compacto segundo numerable es metrizable.

**Problema 2.** Sea  $\mathbb{S}$  la recta de Sorgenfrey. Pruebe que los conjuntos

$$A = \{(-x, x) \in \mathbb{S}^2 : x \in \mathbb{Q}\} \text{ y } B = \{(-x, x) \in \mathbb{S}^2 : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

son cerrados y no se pueden separar por abiertos ajenos en  $\mathbb{S}^2$  (Use el Teorema de la Categoría de Baire).

**Problema 3.** Sea  $A$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$  tal que todo subconjunto infinito de  $A$  tiene un punto de acumulación en  $X$ . Pruebe que  $\overline{A}$  es numerablemente compacto.

**Problema 4.** De un ejemplo de un espacio compacto no metrizable que tenga un subespacio denso metrizable. (Justifique su respuesta)

**Problema 5.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Demuestre que si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  son funciones continuas tales que  $f|_D = g|_D$  para algún espacio denso  $D \subset X$ , entonces  $f = g$ . Use este hecho para encontrar una cota superior a la cardinalidad del conjunto  $C(\mathbb{R})$  de todas funciones continuas con imagen y dominio  $\mathbb{R}$ .

**Problema 6.** Demuestra lo siguiente:

1. Imagen continua y abierta de un espacio 2-numerable es 2-numerable.
2. Subespacios de un espacio 2-numerable son 2-numerables.
3. Demuestra que todo espacio 2-numerable es Lindeloff y separable.

**Problema 7.** Sea  $I$  un conjunto de índices y  $X = \prod_{i \in I} X_i$ . Demuestra que  $X$  es 2-numerable si y solo si todo  $X_i$  es 2-numerable y  $\{i \in I \mid |X_i| > 1\}$  es a lo más numerable.

**Problema 8.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Decimos que  $A$  es un *retracto* de  $X$  si existe  $f : X \rightarrow A$  continua tal que  $f(a) = a$  para todo  $a \in A$ . Demuestra que si  $A$  es retracto de  $X$ , entonces  $A$  es cerrado.

**Problema 9.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $F, G \subseteq X$  subconjuntos cerrados. Demuestra que si  $F \cap G$  y  $F \cup G$  son conexos, entonces  $F$  y  $G$  son conexos.

**Problema 10.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  numerable. Demuestra que  $X \setminus A$  es conexo.