

Examen General de Topología General

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH
Enero, 2019

Instrucciones: Este examen consta de 5 problemas. Para aprobar este examen se requiere al menos resolver tres problemas completos. En cada ejercicio se pide una demostración completa. Con bolígrafo negro escriba sus soluciones; inicie cada problema en una hoja limpia, no inicie la solución de un nuevo problema en una hoja usada. Numere sus hojas como $1/n$, $2/n$, $3/n$, etcétera, siendo n el número total de hojas que entregará.

El tiempo para resolver este examen es de cuatro horas.

1. Probar que una función $f : X \rightarrow Y$ es continua y cerrada si y sólo si $p_X \upharpoonright_G$ y $p_Y \upharpoonright_G$ son funciones cerradas, donde $G \subseteq X \times Y$ es la gráfica de f y p_X y p_Y son las proyecciones canónicas.

2. Muestre que si un espacio X es Hausdorff, compacto y la diagonal

$$\Delta = \{\langle x, x \rangle : x \in X\} \subseteq X \times X$$

es G_δ , entonces X es segundo numerable y por lo tanto metrizable.

3. Suponga que X es un espacio Hausdorff, primero numerable y que es numerablemente compacto. Demuestre que con ninguna topología estrictamente más fina que la original el espacio sigue siendo numerablemente compacto.

4. Sea (X, ϱ) un espacio métrico totalmente acotado y $T : X \rightarrow X$ una isometría. Demuestre que $T[X]$ es denso en X . (Sugerencia: Dado $x \in X$, $\langle T^{(k)}(x) : k \in \mathbb{N} \rangle$ es una útil sucesión, donde $T^{(k+1)}(x) = T(T^{(k)}(x))$, para $k \in \mathbb{N}$.)

5. Sean X , Y y Z tres densos ajenos de los reales, \mathbb{R} , cuya unión es \mathbb{R} . Expanda la topología de los reales agregando como abiertos a X y a Y además de los conjuntos de la forma

$$\{z\} \cup \{w \in X \cup Y : |w - z| < \delta\},$$

donde $z \in Z$ y $\delta > 0$.

Demuestre que: como subespacios, de la nueva topología, X y Y son totalmente desconexos, si $A = Y \cup Z$ y $B = X \cup Z$, entonces son cerrados y totalmente desconexos; sin embargo, $\mathbb{R} = A \cup B$ es conexo.