

Examen Básico de Topología General

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH

Junio, 2023

Instrucciones: En cada ejercicio se pide una demostración completa y clara o un contraejemplo, según el caso. Con bolígrafo negro escriba sus soluciones; inicie cada problema en una hoja limpia escribiendo por un solo lado, no inicie la solución de un nuevo problema en una hoja usada. Numere sus hojas como $1/n$, $2/n$, $3/n$, etcétera, siendo n el número total de hojas que entregará.

El tiempo para resolver este examen es de cuatro horas.

Nombre completo: _____

Problema 1. Demuestre que todo espacio métrico compacto tiene una base numerable.

Problema 2. Sean K un subconjunto compacto de un espacio X y U un subconjunto abierto de X tales que $K \subseteq U$. Demuestre que si X es un espacio completamente regular, entonces es posible hallar una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f[K] \subseteq \{0\} \quad \text{y} \quad f[X \setminus U] \subseteq \{1\}.$$

Problema 3. Considere

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{1/n+1\} \times [-n, n])$$

con la topología de subespacio de \mathbb{R}^2 . Demuestre que X es un espacio conexo que no es conexo por trayectorias.

Problema 4. Sea (X, τ) un espacio primero numerable y $A \subseteq X$ un subconjunto cualquiera de X . Demuestre que:

- i) Un punto x pertenece a $\text{cl}(A)$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$.
- ii) La condición de primero numerabilidad para i) es necesaria: Considere el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología producto, y denote por g a la función constante cero. Defina un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con $g \in \text{cl}(E)$, para el cual no existan sucesiones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tales que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow g$.

Problema 5. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Encuentre una sucesión de funciones continuas $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplan las siguientes dos condiciones:

- Si $x, y \in X$ y $x \neq y$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq f_n(y)$.
- Si $F \subset X$ es cerrado y $x \in X \setminus F$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \notin \text{cl}(f_n(F))$.