

# EXAMEN BÁSICO DE TOPOLOGÍA GENERAL

15 de Febrero de 2021

**Instrucciones:** Este examen consta de 6 problemas, cada uno con un puntaje de 10. Para aprobar este examen se requiere de al menos 40 puntos. Con bolígrafo negro escriba sus soluciones; inicie cada problema en una hoja limpia, no inicie la solución de un nuevo problema en una hoja usada. Numere sus hojas como  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ , etcétera, siendo  $n$  el número total de hojas que entregará y cada hoja llevará su nombre. Los exámenes serán regresados via electrónica al Dr. Salvador Garcia (sgarcia@matmor.unam.mx) y aseguren que el formato muestre con claridad las soluciones, de otra manera no se tomará en cuenta. El tiempo para resolver este examen es de cuatro horas de 10:00 hs a 14:00 hs.

1. Sean  $X$  un espacio topológico,  $(M, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow M$  una función. Probar que el conjunto de puntos de continuidad de  $f$  en un conjunto  $G_\delta$  de  $X$ .

**Sugerencia:** Para cada  $\varepsilon > 0$  considerar el conjunto

$$U_\varepsilon := \{x \in X : \exists V \in \mathcal{N}(x) \forall y, z \in V (d(f(y), f(z)) < \varepsilon)\}.$$

2. Sean  $I, J$  y  $K$  conjuntos infinitos. Probar que  $\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$  y  $\mathbb{R}^K$  son isomorfos si y solo si  $|K| = |I||J|$ , en donde  $|X|$  denota la cardinalidad de un conjunto  $X$ .

3. Demuestre que si un espacio compacto Hausdorff  $X$  es la unión disjunta de dos conjuntos densos  $D_0$  y  $D_1$ , entonces  $D_0$  o  $D_1$  no es  $\sigma$ -compacto (unión numerable de conjuntos compactos).

4. Recordamos que un espacio  $X$  es *hereditariamente Lindelöf* si todo subespacio de  $(X, \tau)$  es Lindelöf. Probar que  $X$  es hereditariamente Lindelöf si y solo si  $(X, \tau|_U)$  es Lindelöf para todo abierto  $U \in \tau$  (en donde  $\tau|_Y$  denota la topología  $\{V \cap Y : V \in \tau\}$  heredada de  $X$  a  $Y$ ).

5 Probar que todo espacio  $T_3$  (regular y Hausdorff) numerable es normal.

6. Sea  $X$  un espacio  $T_2$  (Hausdorff).

- (1) Sea  $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$  una familia de conjuntos conexos y compactos de  $X$  tales que  $C_{n+1} \subseteq C_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  es conexo.
- (2) Dar un ejemplo de una familia  $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$  de subconjuntos cerrados conexos de  $\mathbb{R}^2$  tales que  $C_{n+1} \subseteq C_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  no sea conexo.