

# Examen General de Topología General

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH  
Enero, 2016

**Instrucciones:** Este examen consta de seis problemas, cada uno con un puntaje específico. Para aprobar este examen se requiere de al menos 30 puntos. En cada ejercicio se pide una demostración completa. Con bolígrafo negro escriba sus soluciones; inicie cada problema en una hoja limpia, no inicie la solución de un nuevo problema en una hoja usada. Numere sus hojas como  $1/n$ ,  $2/n$ ,  $3/n$ , etcétera, siendo  $n$  el número total de hojas que entregará.

El tiempo para resolver este examen es de cuatro horas.

- (1) [Valor 6 puntos] Demuestra que un espacio Hausdorff localmente compacto es completamente regular.
- (2) [Valor 6 puntos] Sea  $X$  es un espacio métrico separable y  $Y$  es un subespacio de  $X$ . ¿Existe  $D \subseteq Y$  tal que  $D$  es numerable y la clausura de  $D$  tomada en  $Y$  sea igual a  $Y$ ?
- (3) [Valor 8 puntos] Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $Y$  es la unión de todos los subespacios de  $X$  sin puntos aislados, probar que  $Y$  es un subespacio cerrado de  $X$ .
- (4) [Valor 8 puntos] Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Dos puntos  $a, b \in X$  son  $\varepsilon$ -encadenables, para  $\varepsilon > 0$ , si existe un conjunto finito  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$  tal que
  - (a)  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  y
  - (b)  $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$  para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ .

Probar que si  $X$  es métrico conexo, entonces cualquier par de puntos de  $X$  es  $\varepsilon$ -encadenable, para todo  $\varepsilon > 0$ . (Sugerencia: Dado  $a \in X$ , probar que el conjunto  $C(a, \varepsilon) = \{x \in X : a \text{ y } x \text{ son } \varepsilon\text{-encadenables}\}$  es abierto y cerrado, para todo  $\varepsilon$ .)

- (5) [Valor 10 puntos] Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
  - (a)  $(\forall x \in A)(\exists V \in \mathcal{N}_x)(V \cap A \text{ es cerrado en } V)$ .
  - (b)  $A$  es abierto en  $\overline{A}$ .
  - (c)  $A$  se puede escribir como la intersección de un cerrado de  $X$  y un abierto de  $X$ .
  - (d) Existe  $V \subseteq X$  abierto tal que  $A \subseteq V$  es cerrado en  $V$ .
- (6) [Valor 12 puntos] Demuestra que todo espacio homogéneo que no satisface el teorema de Baire es de primera categoría en sí mismo; es decir, se puede escribir como unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte en  $X$ .