

EXAMEN BÁSICO DE TOPOLOGÍA GENERAL

24 de Junio de 2022

Instrucciones: Este examen consta de seis problemas, de los cuales se deberán resolver al menos cinco problemas y al menos dos de estos cinco deben resolverse en su totalidad. Recuerde iniciar cada problema en una hoja limpia y enumerar las páginas.

Problema 1. Demuestre que si X es un espacio con más de un punto, conexo y de Tychonoff, entonces $|X| \geq |\mathbb{R}|$.

Problema 2. Demuestre que todo espacio métrico compacto tiene una base numerable.

Problema 3. Sean X, Y espacios metrizables ajenos. Definimos τ como la colección de los subconjuntos $U \subseteq X \cup Y$ tal que $U \cap X$ y $U \cap Y$ son abiertos.

- (a) Demuestra que $(X \cup Y, \tau)$ es un espacio topológico.
- (b) ¿Es necesariamente $(X \cup Y, \tau)$ metrizable?

Problema 4. Demuestre que la intersección de cualquier cantidad finita de subconjuntos densos y abiertos de un espacio topológico es un subconjunto denso. Con contraejemplos muestre que no se puede omitir que sean abiertos los subconjuntos y que no se puede omitir el que sea sólo una cantidad finita.

Problema 5. Demuestre que los racionales no tienen compactación unipuntual, es decir, si $K = \mathbb{Q} \cup \{p\}$ es compacto, $p \notin \mathbb{Q}$ y la topología de subespacio de \mathbb{Q} en K coincide con su topología usual, entonces K no es de Hausdorff.

Problema 6. Demuestra o da un contraejemplo de la siguiente afirmación: *Dadas dos compactaciones de los números naturales, una de ellas es homeomorfa a un subespacio de la otra que contiene a los números naturales.*