

Examen General de Topología General

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH

Enero, 2023

Instrucciones: En cada ejercicio se pide una demostración completa y clara o un contraejemplo, según el caso. Con bolígrafo negro escriba sus soluciones; inicie cada problema en una hoja limpia, no inicie la solución de un nuevo problema en una hoja usada. Numere sus hojas como $1/n$, $2/n$, $3/n$, etcétera, siendo n el número total de hojas que entregará.

El tiempo para resolver este examen es de cuatro horas.

Nombre: _____

Problema 1. Consideremos la recta real \mathbb{R} y su topología connumerable

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : |\mathbb{R} \setminus U| \leq \omega\} \cup \{\emptyset\}.$$

¿Es el intervalo $[0, 1]$ un conjunto compacto de (\mathbb{R}, τ) ?

Problema 2. Sean A y B subconjuntos de un espacio topológico X .

- (i) Si A y B son subconjuntos cerrados, probar que $\overline{(A \cup B)^\circ} = \overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ}$.
- (ii) Dar un ejemplo donde no se cumpla el inciso (a) con al menos uno de los dos conjuntos A o B no sea cerrado.

Problema 3. En la recta real \mathbb{R} definir una cantidad infinita de topologías que sean Tychonoff (completamente regulares y T_2) y no sean homeomorfas entre sí.

Problema 4. Para cada $x, y \in \mathbb{R}^2$ sea \overline{xy} el segmento de recta que une a x con y . Si $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, $z = (0, 0)$ y $z_n = (1/n, 1/n)$ para $n \in \mathbb{N}^+$, pruebe que

$$X = \overline{yz} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{xz_n}$$

con la topología heredada del plano es conexo pero no conexo por trayectorias.

Problema 5. Pruebe que si X es un espacio métrico no vacío y sin puntos aislados, entonces X tiene un subespacio denso A cuyo complemento también es denso. *Sugerencia:* para $\varepsilon > 0$ considere los conjuntos $S_\varepsilon \subset X$ tal que

- (i) $d(x, y) \geq \varepsilon$ para cualquier par de elementos distintos x, y de S_ε ;
- (ii) S_ε es **maximal** con respecto a (i).

Problema 6. Sea $\mathbb{I} = [0, 1]$ y para un cardinal no numerable κ considere al espacio $\Sigma = \{x \in \mathbb{I}^\kappa : |x^{-1}(\mathbb{I} \setminus \{0\})| \leq \aleph_0\}$ dotado con la topología de subespacio. Demuestre que:

- (i) Σ es denso \mathbb{I}^κ ;
- (ii) Si $A \subset \Sigma$ es numerable, entonces $\text{cl}_\Sigma(A)$ es compacto;
- (iii) Σ es numerablemente compacto pero no compacto.