

Examen General de Topología General  
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH  
Noviembre 2020

Instrucciones: Este examen consta de 6 problemas. Cada problema vale un punto. Se aceptan respuestas parciales. Para aprobar este examen se requiere obtener al menos 3 puntos. En cada ejercicio se pide una demostración completa. Con bolígrafo negro escriba sus soluciones; inicie cada problema en una hoja limpia, no inicie la solución de un nuevo problema en una hoja usada. Numere sus hojas como  $1/n$ ,  $2/n$ ,  $3/n$ ... siendo  $n$  el número total de hojas que se entregará. El tiempo para resolver este examen es de cuatro horas.

1. Sea  $X$  un espacio de Tychonoff, localmente compacto y segundo numerable. Demuestre que existe una familia  $A$  de subconjuntos abiertos con las siguientes propiedades:
  - (a) Si  $U \in A$ , entonces  $\overline{U}$  es compacto.
  - (b)  $A$  es una base numerable para  $X$ .
2. Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Demuestra que si  $C \subseteq X$  es conexo,  $A \cap C \neq \emptyset$  y  $(X \setminus A) \cap C \neq \emptyset$ , entonces  $C \cap (\overline{A} \setminus \text{int}(A)) \neq \emptyset$ .
3. Sea  $X$  un espacio de Tychonoff, separable y primero numerable. ¿Es  $X$  metrizable? (Demostración o contraejemplo).
4. Sea  $X$  un espacio de Tychonoff y  $Y$  una compactación de  $X$ .
  - (a) Demuestra o da un contraejemplo:
    - i. Si  $X$  es conexo, entonces  $Y$  es conexo.
    - ii. Si  $Y$  es conexo, entonces  $X$  es conexo.
  - (b) Demuestra que  $X$  es conexo si y solo si  $\beta X$  es conexo.  
(Donde  $\beta X$  denota la compactación de Čech-Stone).
5. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $A \subseteq X$  cerrado tal que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $K_\varepsilon \subseteq X$  compacto tal que  $A \subseteq \{x \in X \mid \exists y \in K_\varepsilon (d(x, y) < \varepsilon)\}$ . Demuestra que  $A$  es compacto.
6. Sean  $X, Y$  espacios topológicos,  $f : X \longrightarrow Y$  continua, cerrada y sobreyectiva tal que  $f^{-1}(y)$  es compacto para toda  $y \in Y$ . Demuestra que si  $Y$  es compacto, entonces  $X$  es compacto.